

**NEWTON-ÄHNLICHE VERFAHREN BEI  
NAVIER – STOKES  
UND ANDEREN RANDWERTPROBLEMEN**

**INAUGURAL-DISSERTATION**

**zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Düsseldorf**

**vorgelegt von**

**Helmut Lütcke**  
**aus Ratingen**

**Düsseldorf 1979**



NEWTON-ÄHNLICHE VERFAHREN BEI  
NAVIER-STOKES-  
UND ANDEREN RANDWERTPROBLEMEN

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Helmut Lütcke  
aus Ratingen

Düsseldorf 1979



1. Berichterstatter: Professor Dr. B. Döring

2. Berichterstatter: Professor Dr. W. Petry

Tag der mündlichen Prüfung: 5. Juli 1979



# I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

|                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| EINLEITUNG                                                               | 1   |
| I. DAS VERFAHREN UND SEINE VORAUSSETZUNGEN                               | 4   |
| 1. Voraussetzungen und Klassifizierung des Problems                      | 6   |
| 2. Differenzierbarkeit und Invertierbarkeit der Ableitung                | 11  |
| 3. Aufstellung von geeigneten Iterationsverfahren                        | 16  |
| 4. Konvergenzsätze                                                       | 22  |
| II. DER FALL QUASILINEARER, ELLIPTISCHER RANDWERTPROBLEME                | 45  |
| 1. Grundlegende Definitionen und Beziehungen                             | 46  |
| 2. Das Dirichletproblem                                                  | 56  |
| 3. Hinreichende Bedingungen an $\Omega$ , $L$ und $B$                    | 66  |
| III. EXPLIZITE BESTIMMUNG VON EINBETTUNGSKONSTANTEN                      | 74  |
| 1. Abschätzung von $ u _{k,2}$ durch $ \Delta^m u _{0,2}$ für $k \leq m$ | 75  |
| 2. Abschätzung von $ u _{k,2}$ durch $ \Delta^m u _{0,2}$ für $k > m$    | 82  |
| 3. Abschätzung von $ u _{k,\infty}$ durch $ \Delta^m u _{0,2}$           | 92  |
| IV. EIN EINDIMENSIONALES BEISPIEL                                        | 105 |
| 1. Die Voraussetzungen und Abschätzungen                                 | 106 |
| 2. Die verschiedenen Iterationsverfahren                                 | 108 |
| 3. Vergleich mit der exakten Lösung                                      | 112 |
| 4. Betrachtung der äquivalenten Integralgleichung                        | 121 |
| V. ANWENDUNGSBEISPIELE AUS DER STRÖMUNGSMECHANIK                         | 123 |
| 1. Einführung in die Problematik der Navier-Stokes-Gleichungen           | 124 |
| 2. Die Voraussetzungen und Abschätzungen für den ebenen Fall             | 133 |
| 3. Beispiel 1 - Strömung in einem kreisförmigen Hohlraum                 | 141 |
| 4. Beispiel 2 - Strömung in einem einseitig offenen Kasten               | 156 |
| 5. Beispiel 3 - Strömung durch ein mehrseitig offenes System             | 168 |
| SCHLUSSBEMERKUNGEN                                                       | 177 |
| ANHANG I                                                                 | 179 |
| ANHANG II                                                                | 182 |
| ABKÜRZUNGEN UND BEZEICHNUNGEN                                            | 189 |
| ZUSAMMENFASSUNG                                                          | 191 |
| LITERATURVERZEICHNIS                                                     | 192 |



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41533922\\_0007](https://archive.org/details/IA41533922_0007)

## E I N L E I T U N G

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Lösung nichtlinearer Operatorgleichungen, und zwar speziell solcher, die aus einem linearen und einem bilinearen Anteil bestehen. In der Regel kann davon ausgegangen werden, daß eine Lösung der linearen Gleichung, wo der Bilinearteil fehlt, bekannt ist. Wir denken uns nun den Bilinearteil mit einem reellen oder auch komplexen Parameter multipliziert. Es ist einsichtig, daß dann auch eine Lösung des nichtlinearen Problems existiert, wenn der Parameter nicht zu groß und Linear- wie Bilinearteil gewisse Stetigkeitseigenschaften besitzen. In diesem Fall ist es sinnvoll, ausgehend von der Lösung des linearen Teils über ein geeignetes Iterationsverfahren die Lösung der nichtlinearen Gleichung zu approximieren. Hierzu bieten sich z.B. Fixpunktmethoden oder Newtonähnliche Verfahren an. Bekanntlich sind diese Verfahren von reellen Gleichungen auf Operatorgleichungen in Räumen mit gewisser Struktur übertragbar.

Die Konvergenz dieser Iterationsverfahren hängt naturgemäß nicht zuletzt von der Qualität der Ausgangsnäherung ab. Von daher ist es unter Umständen vorteilhaft, diese Verfahren in eine äußere Iteration "einzubetten", um von der Lösung eines betraglich kleineren Parameters zur Lösung eines betraglich größeren zu gelangen, bis die Lösung des ursprünglich gestellten Problems erreicht ist. Diese Vorgehensweise ist als "Kontinuitätsmethode" oder "Einbettungsverfahren" bekannt.

Manche Probleme tragen von "Natur aus" einen solchen Parameter. Zu diesen gehören die Navier-Stokes-Gleichungen (NSG), ein System von partiellen Differentialgleichungen des obigen Typs, welches die Strömung von Flüssigkeiten bzw. Gasen beschreibt. Hier ist der Parameter die Reynoldszahl und die Lösung der linearen Gleichung die sogenannte Stokes'sche Näherung. Insbesondere wegen ihres nichtlinearen Charakters hat sich die Lösung der NSG als ein besonders schwieriges und komplexes Problem erwiesen. Exakte, d.h. analytische Lösungen liegen nur in einigen wenigen Spezialfällen vor. Für die

Praxis ist man deshalb auf physikalische Modelle und numerische Lösungsmethoden angewiesen. Letztere basieren in der Regel auf Differenzenverfahren und in neuester Zeit auch auf der Methode der finiten Elemente. Daneben lassen sich mit den modernen Hilbert-raummmethoden theoretisch Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen gewinnen. Auf beiden Seiten, der praktischen wie der theoretischen, sind in letzter Zeit weitreichende Ergebnisse erzielt worden. Je komplizierter sich jedoch ein Problem darstellt, um so größer ist die Spanne zwischen rein numerischer und rein funktionalanalytischer Behandlung. Die vorliegende Arbeit soll mit dazu beitragen, diese Spanne zu überbrücken. Dementsprechend müssen die theoretische als auch die praktische Seite berührt werden, ohne daß spezielle, am Rande liegende, drängende Fragen abschließend behandelt werden können. Im theoretischen Bereich betrifft dies vor allem die Frage nach der erforderlichen Regularität der betrachteten Gebiete, im praktischen die Abschätzung des Diskretisierungsfehlers bei den eingesetzten Differenzenverfahren.

Auch wenn ein gewisser Spezialfall der NSG Zielpunkt dieser Arbeit ist, ist es sinnvoll, vorab den Problemkreis zu behandeln, dem sich dieser einordnet. Dies bringt zunächst formale Vorteile; darüber hinaus werden so Ergebnisse erzielt, die über den Rahmen der NSG weit hinausgehen.

Für die Betrachtung der oben genannten Iterationsverfahren ist zunächst lediglich die Struktur des Problems von Interesse. Dementsprechend werden in Kapitel I allgemeine Methoden zur Lösung von Gleichungen des eingangs genannten Typs entwickelt. Diese basieren auf den obigen Iterationsverfahren. Ihre Anwendung knüpft sich im wesentlichen an die Bedingung, daß sich der Bilinearteil dem Linear- teil in gewisser Weise unterordnet.

In Kapitel II wird gezeigt, daß diese Bedingung für den Fall bilinearer Randwertprobleme mit elliptischem Hauptteil unter genügenden Regularitätsvoraussetzungen erfüllt ist, wenn die Ordnung der Differentiationen im Bilinearteil gegenüber denen des Hauptteils nicht zu groß sind. Die NSG fügen sich hier ein.

Zur Anwendung der in Kapitel I entwickelten Verfahren müssen gewisse Konstanten bereitgestellt werden. Im Fall elliptischer Randwertprobleme läuft dies auf die Kenntnis einiger "Einbettungskonstanten" aus der bekannten Theorie der Sobolev'schen Einbettungssätze hinaus. Ihre Bestimmung ist Gegenstand von Kapitel III.

In Kapitel IV wird die Anwendung der entwickelten Verfahren am Beispiel eines eindimensionalen Randwertproblems "erprobt".

Kapitel V befaßt sich schließlich mit den NSG, und zwar genauer mit dem inkompressiblen, stationären, ebenen Fall. Hierbei werden drei im Wesen verschiedene Beispiele behandelt. Teilweise wurden diese bereits von anderen Verfassern bearbeitet, so daß vergleichende Aussagen zur Verfügung stehen. Indem wir von der Lösung der linearen Gleichung ausgehen, werden hier speziell Aussagen für den Fall kleiner Reynoldszahlen, d.h. "zäher" Flüssigkeiten gewonnen. Hierbei werden die eindeutige Existenz einer Lösung sowie die Konvergenz der genannten Iterationsverfahren für Reynoldszahlen bis zur Größenordnung von Eins gesichert. Basierend auf den Abschätzungen aus Kapitel III können ferner im Vergleich zu anderen Arbeiten konkrete Angaben über die Verfahrensfehler gemacht werden.

Hinsichtlich einer abschließenden Diskussion der gewonnenen Ergebnisse sei auf die "Schlußbemerkungen" (S. 177) hingewiesen.

Die erforderlichen numerischen Berechnungen wurden mit entsprechenden FORTRAN-Programmen auf der Telefunken-Rechenanlage TR 445 der Universität Düsseldorf durchgeführt. Die Figuren wurden größtenteils mit Hilfe der dort vorhandenen Plot-Software erstellt.

Soweit Abkürzungen und Bezeichnungen über die üblichen Konventionen hinausgehen, werden sie dort erklärt, wo sie zum erstenmal verwendet werden. Darüber hinaus befindet sich am Schluß der Arbeit (S. 189) ein entsprechendes Verzeichnis.

## K A P I T E L   I

### Das Verfahren und seine Voraussetzungen

Es wird zunächst gezeigt, wie die in der Einleitung angesprochenen Probleme allgemein auf eine Operatorgleichung  $F(u)=0$  transformiert werden können.  $F$  ist eine nichtlineare Abbildung zwischen zwei Banachräumen und besteht im wesentlichen aus einem Linearteil und einem Bilinearteil mit einem Parameter als Faktor. Die Voraussetzungen sind dabei so gefaßt, daß die Normstruktur und die Vollständigkeit apriori nur im Bildraum von  $F$  vorzuliegen brauchen. Die Banachraumstruktur des Urbildbereichs wird über den als invertierbar vorausgesetzten Linearteil in natürlicher Weise induziert. Eine vorhandene Normstruktur im Urbildbereich, mit der die nötigen Voraussetzungen erfüllbar sind, ist zu der induzierten äquivalent. Letztere hat jedoch den Vorteil, daß sie dem Problem angepaßt ist und sich deshalb die in der Praxis vorzunehmenden Normabschätzungen wesentlich günstiger gestalten.

Das obige "Setting" hat zur Folge, daß  $F$  beliebig oft fréchet-differenzierbar ist und die Ableitung von  $F$  zumindest für betragsmäßig kleine Parameter stetig invertierbar ist. Liegt ein inneres Produkt, also eine Hilbertraumstruktur vor, so kann dabei dem Zusammenwirken von Linear- und Bilinearteil Rechnung getragen werden.

Wir gehen davon aus, daß die Schwierigkeiten bei der Lösung des Problems in seiner Nichtlinearität begründet sind. Die genannten Eigenschaften von  $F$  machen die Anwendung von geeigneten Iterationsverfahren sinnvoll, wo bei jedem Iterationsschritt ein entsprechendes lineares Problem zu lösen ist. Hierzu rechnen zum Beispiel das Verfahren der sukzessiven Approximation (SA), das Newton-Verfahren (NV) und das Tschebyscheffverfahren (TV). Diese und ähnliche Verfahren werden in Abschnitt 3 vorgestellt, wobei unter anderem auf die formalen Besonderheiten für den hier vorliegenden Fall eines bilinearen Operators eingegangen wird.

Der letzte Abschnitt widmet sich der Konvergenz dieser Verfahren. Zunächst werden zwei allgemeine Sätze über das NV bzw. eine mögliche

Modifikation hiervon aufgestellt. Im wesentlichen gehen diese Sätze auf KANTOROWITSCH zurück (vergl. [29]). Zu beachten sind die gegenüber [29] verbesserten Fehlerschranken. Diese werden teils bewiesen, teils von anderen Autoren übernommen (vergl. [19], [20], [21] und [26]). Aus diesen Konvergenzsätzen läßt sich dann unmittelbar ein Satz herleiten, der auf unseren Fall zugeschnitten ist. Die Voraussetzungen zur Konvergenz sind dabei für die genannten Verfahren dieselben, was auf die Bilinearität des Operators zurückzuführen ist; dies betrifft insbesondere das TV.

Das Problem besteht allerdings noch darin, eine geeignete Ausgangsnäherung zu finden, für die sich die Voraussetzungen des Satzes erfüllen lassen. Das Verfahren ist darauf abgestellt, die nach Voraussetzung eindeutig existierende Lösung des linearen Problems zum Parameterwert Null als Ausgangsnäherung einzusetzen. Mit den apriori bereitzustellenden Konstanten kann hierbei unmittelbar ein entsprechender "Einzugsbereich" hinsichtlich des Parameters explizit angegeben werden. In der Regel ist dieser beschränkt. Interessiert die Lösung für einen (betraglich) größeren Parameter, so ist es wegen der gegebenen stetigen Abhängigkeit angebracht, das Problem zunächst für einen kleineren, aber im obigen Einzugsbereich liegenden Parameter zu lösen, um dann die zugehörige Lösung als Ausgangsnäherung für die ursprünglich gestellte Aufgabe zu versuchen. Hierbei sind natürlich auch mehrere Zwischenschritte dieser Art denkbar. Das benutzte Iterationsverfahren ist dann in einer "Stetigkeitsmethode eingebettet" (vergl. z.B. auch [7], [22] und [39]). Ist man lediglich an der Lösung des "Endproblems" interessiert, so kann es zweckmäßig sein, die Iteration bei jedem "Einbettungsschritt" vorzeitig abzubrechen, um bereits wieder eine Erhöhung des Parameters vorzunehmen. Diesbezüglich wird ein auf die praktische Anwendung ausgerichteter Algorithmus angegeben. Die abschließende Diskussion über Eindeutigkeitsbereich und Fehlerschranken zeigt, daß die Verhältnisse, für den hier betrachteten Operatortyp für jeden Fall qualitativ gleich ausfallen und nur von den oben angesprochenen Konstanten abhängen.

## 1. Voraussetzungen und Klassifizierung des Problems

Wir gehen von folgender Aufgabenstellung aus:

Gegeben seien

(1.1) Lineare Räume  $X$  und  $Y$  über  $K$ , wobei  $K := \mathbb{R}$  oder  $K := \mathbb{C}$

(1.2) Eine lineare Abbildung  $L: X \rightarrow Y$

(1.3) Eine bilineare Abbildung  $B: X \times X \rightarrow Y$

(1.4)  $M \subset X$ ;  $\lambda \in K$ ;  $r \in Y$

Gesucht ist ein Element  $x \in X$  mit

(1.5)  $Lx + \lambda B(x, x) = r$

(1.6)  $x \in M$

Bei den in der Einleitung betrachteten Problemen ist  $x$  mit (1.5) Lösung einer vorgegebenen Differentialgleichung und erfüllt mit (1.6) gewisse Randbedingungen; als Element von  $X$  erfüllt es lediglich die nötigen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen.

Bei der Behandlung eines solchen Problems ist zunächst zu untersuchen, ob eine Lösung existiert; ferner ist für den Fall der Existenz einer Lösung zu klären, inwieweit diese eindeutig bestimmt ist und schließlich wie man sie erhält. Mitunter lassen sich die Existenz- und die Eindeutigkeitsfrage völlig losgelöst von der Konstruktionsfrage behandeln. Die Lösung des Konstruktionsproblems dagegen klärt in der Regel zugleich die Existenz und die Eindeutigkeit - zumindest in einem gewissen Rahmen. Zur Behandlung des Problems von dieser Seite her eignen sich vor allem Fixpunktverfahren und andere Iterationsverfahren auf einem geeigneten Banachraum. Hierzu treffen wir über (1.1) - (1.4) hinaus folgende Voraussetzungen:

I. Es existieren ein Element  $x_M$  aus  $M$  und ein linearer Teilraum  $U$  von  $X$ , so daß  $M = x_M + U := \{x \in X \mid \exists u \in U: x = x_M + u\}$ .

II. Es existiert eine Norm  $\|\cdot\|: Y \rightarrow \mathbb{R}$  und  $(Y, \|\cdot\|)$  ist ein Banachraum.

III. Die durch  $A: U \rightarrow Y$ ,  $Au := Lu$  erklärte Einschränkung von  $L$  auf  $U$  (i.Z.:  $A := L|_U$ ) ist invertierbar.

IV.  $B$  ist symmetrisch und im folgenden Sinne beschränkt:

$$a) \forall x \in M \exists \beta > 0: \forall u \in U: \|B(x, u)\| \leq \beta \|Lu\|$$

$$b) \exists \gamma > 0: \forall u, v \in U: \|B(u, v)\| \leq \gamma \|Lu\| \|Lv\|$$

#### Anmerkung

Die Schreibweise  $\|\cdot\|$  soll anzeigen, daß es sich hier um eine Abbildung handelt, deren Wert an einer Stelle  $u$  aus dem Definitionsbereich sich daraus ergibt, daß man anstelle des Punktes  $u$  einsetzt. Die Bezeichnungsweise werden wir auch bei anderen Abbildungen entsprechend anwenden.

Zu den obigen Voraussetzungen sei im einzelnen folgendes vermerkt:

1. Die Beziehung zwischen  $U$  und  $M$  ist äquivalent zu den beiden folgenden Implikationen:

$$(1.7) \quad x \in M, u \in U \Rightarrow x + u \in M \quad \text{und} \quad x, y \in M \Rightarrow x - y \in U$$

Dies folgt unmittelbar aus der Unterraumeigenschaft von  $U$ . Bei einem Randwertproblem besteht  $U$  gerade aus den Funktionen, welche die homogenen (linearen) Randbedingungen erfüllen.

2. Mit der Norm in  $Y$  wird der Konvergenzbegriff für die zu betrachtenden Iterationsverfahren geschaffen. Die Vollständigkeit sichert die Existenz des Grenzwertes bei einem in sich konvergenten Iterationsprozeß. Da man jeden linearen normierten Raum vervollständigen kann, ist die Vollständigkeit für sich genommen unproblematisch - sie stellt jedoch im Zusammenhang mit den übrigen Voraussetzungen eine echte Forderung dar.

Gewisse Vorteile können sich ergeben, wenn  $Y$  darüber hinaus unitär und damit ein Hilbertraum ist. Wir werden hierauf im einzelnen eingehen.

3. Mit der Existenz von  $A^{-1}$  existiert genau ein  $u \in U$  mit  $Lu = r - Lx_M$ ; damit ist aber nach (1.7)  $x := x_M + u$  Lösung des Problems für  $\lambda = 0$ . Die Idee ist, daß aufgrund der Beschränktheitsforderungen aus Voraussetzung IV die Auflösbarkeit auch noch für zumindest betraglich kleine Parameter  $\lambda$  gegeben ist.

Zu beachten ist, daß für  $x \in X \setminus U$  ohne weiteres  $Lx = 0$  gelten kann, ohne daß  $x$  das Nullelement ist, während die entsprechende Gleichung auf  $U$  nach Voraussetzung III nur trivial und damit auf  $M$  eindeutig lösbar ist.

4. Die Symmetrie von  $B$  ist keine einschränkende Forderung, da in (1.5) die beiden Argumente von  $B$  gleich sind; ist  $B$  ursprünglich nicht symmetrisch vorgegeben, so können wir ohne Einfluß auf die Problemstellung  $B$  ersetzen durch die symmetrische Bilinearform  $\bar{B}$ , die definiert ist durch:

$$(1.8) \quad \forall x, y \in X: \bar{B}(x, y) := \frac{1}{2} [B(x, y) + B(y, x)]$$

Ferner genügt es, die Bedingung IV.a lediglich für ein  $x \in M$  vorzuschreiben, denn ist  $y$  ein weiteres Element von  $M$ , so gilt wegen der Bilinearität von  $B$  und wegen IV.b mit  $v := y - x \in U$ :

$$(1.9) \quad \forall u \in U: \|B(y, u)\| \leq \|B(x, u)\| + \|B(y - x, u)\| \leq (\beta + \gamma \|L_v\|) \|Lu\|$$

Ist  $Y$  unitär, so braucht wegen der Symmetrie von  $B$ , die Bedingung IV.b nur für den Fall  $u = v$  nachgewiesen zu werden. (Dies zeigt man ähnlich wie für den Fall eines bilinearen symmetrischen Funktionals - vergl. z.B. ACHIESER-GLASMANN [2], S. 60).

Bisher haben wir auf  $X$  bzw. auf  $U$  noch keine Normstruktur vorausgesetzt. Allerdings läßt sich diese in natürlicher Weise induzieren. Hierzu gilt:

#### Lemma 1

a) Unter den Voraussetzungen I - IV wird durch

$$(1.10) \quad \forall x \in X: \|x\|_L := \|Lx\|$$

auf  $X$  eine Seminorm und auf  $U$  eine Norm erklärt.

Bezüglich dieser Norm ist  $U$  vollständig und die Abbildungen  $A$  und  $A^{-1}$  sind beschränkt, wobei

$$(1.11) \quad \|A\| = \|A^{-1}\| = 1$$

Ferner sind die für festes  $x \in M$  definierte lineare Abbildung  $B(x, \cdot)$  und  $B$  als bilineare Abbildung auf  $U$  beschränkt, wobei

$$(1.12) \quad \|B(x, \cdot)\| \leq \beta; \|B\| \leq \gamma \quad \text{mit } \beta, \gamma \text{ aus IV.}$$

- b) Ist andererseits  $\|\cdot\|_U$  irgendeine Norm auf  $U$ , so sind  $A$  und  $A^{-1}$  bei dieser Normierung beschränkt und  $\|\cdot\|$  äquivalent zur Norm aus (1.10) ist; sind dann  $B(x, \cdot)$  und  $B$  auf  $U$  beschränkt, so folgen hieraus die Bedingungen IV.a und IV.b.

### Anmerkung

Sind  $(R, \|\cdot\|_R)$  und  $(S, \|\cdot\|_S)$  normierte Räume und  $T: R \rightarrow S$  eine lineare Abbildung, so ist  $T$  beschränkt, wenn

$$(1.13) \quad \|T\| := \sup_{0 \neq r \in R} \frac{\|Tr\|_S}{\|r\|_R} < \infty.$$

Bekanntlich ist die Beschränktheit bei einer linearen Abbildung gleichbedeutend mit der Stetigkeit. In Anlehnung an den englischen Begriff "continuous" werden wir eine lineare und beschränkte Abbildung auch als "koniar" bezeichnen.

Entsprechend nennen wir eine bilineare Abbildung  $d: R \times R \rightarrow S$  beschränkt, wenn

$$(1.14) \quad \|d\| := \sup_{0 \neq p, q \in R} \frac{\|d(p, q)\|_S}{\|p\|_R \|q\|_R} < \infty$$

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß natürlich die "Abbildungsnorm"  $\|T\|$  bzw.  $\|d\|$  von den jeweils verwendeten Normen in  $R$  und  $S$  abhängt, auch wenn dies durch die Bezeichnungsweise nicht mehr zum Ausdruck kommt.

Gemäß der Definition der Abbildungsnorm sind  $\|T\|$  bzw.  $\|d\|$  jeweils die kleinste Konstante  $K$  mit der Eigenschaft

$$(1.15) \quad \forall r \in R: \|Tr\|_S \leq K \|r\|_R \quad \text{bzw.}$$

$$(1.16) \quad \forall p, q \in R: \|d(p, q)\|_S \leq K \|p\|_R \|q\|_R$$

Ist  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  ein weiterer normierter Raum,  $S' := T(R)$  und  $T' : S' \rightarrow Z$  eine weitere koniare Abbildung, so ist auch die damit wohldefinierte Hintereinanderausführung  $T'T : R \rightarrow Z$  koniar, wobei

$$(1.17) \quad \|T'T\| \leq \|T'\| \|T\|$$

Die Abschätzungen (1.15) bis (1.17) bezeichnen wir auch als "Normaufspaltung".

Hinsichtlich dieser und weiterer Beziehungen für Abbildungsnormen sei z.B. verwiesen auf [2], [8], [14], [29] und [45].

### Beweis zu Lemma 1

- a) Die Normeigenschaften von  $\|\cdot\|_L$  folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der Norm aus  $Y$  und der Linearität von  $L$ . Die Definitheit der Norm auf  $U$  ergibt sich aus der Injektivität von  $A$ . Zur Vollständigkeit von  $(U, \|\cdot\|_L)$  gilt:

$$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge (CF) in } U \Rightarrow \|u_n - u_m\|_L \rightarrow 0 \text{ für } n, m \rightarrow \infty \Rightarrow \quad (1.10)$$

$$\|Lu_n - Lu_m\| \rightarrow 0 \text{ für } n, m \rightarrow \infty \Rightarrow \{y_n := Lu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ CF in } Y \Rightarrow \quad YBR$$

$$\exists y \in Y : \|Lu_n - y\| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty ;$$

$$L|_U \text{ invertierbar} \Rightarrow \exists u \in U : Lu = y ,$$

und  $u$  ist Grenzwert von  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  im Sinne der auf  $U$  erklärten Norm, denn:

$$\|u_n - u\|_L \stackrel{(1.10)}{=} \|L(u_n - u)\|_{\text{lin.}} = \|Lu_n - Lu\| = \|Lu_n - y\| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Hinsichtlich der Beschränktheit von  $A$ ,  $A^{-1}$ ,  $B(x, \cdot)$  und  $B$  ist lediglich zu beachten, daß aufgrund der Definition (1.10):

$$(1.18) \quad \forall u \in U : \|Au\| = \|Lu\| = \|u\|_L$$

- b) Sind  $A$  und  $A^{-1}$  beschränkt, so existieren zwei Konstanten  $K_1 > 0$  und  $K_2 > 0$  mit

$$(1.19) \quad \forall u \in U : \|Au\| \leq K_1 \|u\|_U \text{ und } \|u\|_U \leq K_2 \|Au\| .$$

Wegen  $\|Au\| = \|u\|_U$  bedeutet (1.19) aber gerade die Äquivalenz der Normen auf U.

Sind  $B(x, \cdot)$  und B auf U beschränkt, so existieren Konstanten  $K_3 > 0$  und  $K_4 > 0$ , so daß

$$(1.20) \quad \forall u, v \in U: \|B(x, u)\| \leq K_3 \|u\|_U \quad \text{und} \quad \|B(u, v)\| \leq K_4 \|u\|_U \|v\|_U.$$

Zusammen mit (1.19) folgen daraus IV.a mit  $\beta := K_3 K_2$  und IV.b mit  $\gamma := K_4 K_2^2$ . ▲

Mit Hilfe des Elements  $x_M$  aus Voraussetzung I transformieren wir das Problem (1.5)-(1.6) auf die Operatorgleichung

$$(1.21) \quad F(u) = 0$$

wobei  $F: U \rightarrow Y$  erklärt ist durch

$$(1.22) \quad F(u) := Lu + \lambda B(x_M + u, x_M + u) + s \quad \text{mit} \quad s := Lx_M - r.$$

Offenbar besteht dann folgender Zusammenhang:

### Lemma 2

Ist  $u \in U$  Lösung von (1.21), so löst  $x := x_M + u$  das Problem (1.5)-(1.6).

Ist andererseits  $x$  eine Lösung von (1.5)-(1.6), so ist  $u := x - x_M$  eine Lösung von (1.21).

### Beweis

Wegen  $x_M \in M$  ist nach Bem. 1, S.7  $u = x - x_M \in U$  und  $x = x_M + u \in M$ . Ferner folgt aus der Linearität von L und der Definition von F  $Lx + \lambda B(x, x) = r \Leftrightarrow L(x_M + u) + \lambda B(x_M + u, x_M + u) - r = 0 \Leftrightarrow F(u) = 0$ . ▲

## 2. Differenzierbarkeit und Invertierbarkeit der Ableitung

Nach Abschnitt 1 suchen wir also eine Nullstelle des auf U erklärten nichtlinearen Operators F. U sei gemäß (1.10) normiert, wobei wir im folgenden L als Index an  $\|\cdot\|$  weglassen werden, wenn durch die Bezeichnung der Elemente und vom Zusammenhang her unmittelbar klar ist, welche Norm gemeint ist.

Aus der Beschränktheit von A und B folgt zunächst die Fréchet-differenzierbarkeit von F. Im einzelnen gilt hierzu

### Lemma 3

F ist auf U beliebig oft fréchetdifferenzierbar, wobei für  $u \in U$ :

$$a) F'[u] = A + 2 \lambda B(x_M, u, \cdot)$$

$$b) F''[u] = 2 \lambda B$$

$$c) F^{(k)}[u] = 0 \quad \text{für } k = 3(1)\infty$$

### Beweis

Zunächst folgt aus (1.22) wegen der Symmetrie und der Bilinearität von B

$$(2.1) \quad F(u) = Tu + \lambda Q(u) + \lambda B(x_M, x_M) + s,$$

wobei T, Q:  $U \rightarrow Y$  definiert sind durch

$$(2.2) \quad Tu := Au + 2 \lambda B(x_M, u), \quad Q(u) := B(u, u).$$

T ist linear und nach Voraussetzung III und IV.a beschränkt, indem  $\|T\| \leq \|A\| + 2|\lambda| \|B(x_M, \cdot)\| \leq 1 + 2|\lambda|\beta$ , wenn  $\beta$  die zu  $x_M$  gehörige Konstante aus IV.a ist. Damit ist aber auch T fréchetdifferenzierbar, wobei

$$(2.3) \quad T'[u](v) = Av + 2 \lambda B(x_M, v); \quad T^{(k)}[u] = 0 \quad \text{für } k \geq 2$$

Hinsichtlich der Fréchetdifferenzierbarkeit von Q gilt mit  $u, v \in U$  gemäß der Eigenschaften von B

$$\|Q(u+v) - Q(u) - 2 B(u, v)\| = \|B(v, v)\| \leq \gamma \|v\|^2, \text{ so daß}$$

$$(2.4) \quad Q'[u](v) = 2 B(u, v)$$

$Q'[u]$  ist seinerseits wieder linear in u, womit

$$(2.5) \quad Q''[u](v, w) = 2 B(v, w), \quad Q^{(k)}[u] = 0 \quad \text{für } k \geq 3.$$

Die Aussagen des Lemmas ergeben sich nun unmittelbar aus

$$(2.6) \quad F^{(k)}[u] = T^{(k)}[u] + \lambda Q^{(k)}[u] \quad \text{für } k \geq 1.$$

Hinsichtlich der hier benutzten Regeln für die Fréchetdifferenzierbarkeit siehe man z. B. KANTOROWITSCH-AKILOW [29] S. 534. ▲

Die Voraussetzungen aus Abschnitt 1 sichern darüberhinaus die Existenz der beschränkten Inversen von  $F'[u]$  für alle  $u \in U$  und für betragsmäßig genügend kleine Parameterwerte  $\lambda$ . Wir ziehen hierzu die folgenden Hilfssätze heran:

Lemma 4 (verallgemeinertes Banachlemma)

Es seien  $R, S$  Banachräume und  $T_1, T_2$  zwei koniare Abbildungen von  $R$  in  $S$ . Besitzt  $T_1$  eine koniare Inverse  $T_1^{-1}$ , so auch  $T := T_1 + T_2$ , vorausgesetzt es existiert eine Konstante  $\tau < 1$  mit

$$(2.7) \quad \|T_1^{-1} T_2\| \leq \tau.$$

Es gilt dann

$$(2.8) \quad \|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\tau} \|T_1^{-1}\|.$$

Lemma 5

Es seien  $R, S$  normierte Räume und  $T$  eine koniare Abbildung von  $R$  in  $S$ . Dann besitzt  $T$  eine koniare Inverse, und  $T$  surjektiv ist und eine Konstante  $m > 0$  existiert mit

$$(2.9) \quad \forall s \in S: \|Ts\| \geq m\|s\|.$$

Es gilt dann

$$(2.10) \quad \|T^{-1}\| \leq \frac{1}{m}.$$

Lemma 6 (L. von LAX-MILGRAM)

Es sei  $H$  ein Hilbertraum und  $d: H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  ein bilineares Funktional mit

$$(2.11) \quad \exists K_1 > 0 \forall u, v \in H: |d(u, v)| \leq K_1 \|u\| \|v\|$$

$$(2.12) \quad \exists K_2 > 0 \forall u \in H: |d(u, u)| \geq K_2 \|u\|^2.$$

Dann existieren zu jedem vorgegebenen koniaren Funktional  $g: H \rightarrow \mathbb{K}$  zwei eindeutig bestimmte Elemente  $v, w \in H$  mit

$$(2.13) \quad \forall u \in H: g(u) = d(u, v) = \overline{d(w, u)}.$$

(Hierbei bezeichnen  $\|\cdot\|$  die durch das innere Produkt in  $H$  induzierte Norm,  $|\cdot|$  den Betrag und  $\overline{\phantom{x}}$  die Konjugation in  $\mathbb{C}$ .)

Zum Beweis von Lemma 4 und 5 sei z.B. verwiesen auf KANTOROWITSCH-AKILOW [29] Satz 4, S. 140 bzw. Satz 2, S. 137-138; zum Beweis von Lemma 6 siehe man z.B. FRIEDMAN [25] Theorem 14.1, S. 41.

Auf unser Problem bezogen erhalten wir hieraus

### Satz 1

Es sei  $w \in U$ ,  $x = x_M + w$  und  $f := F'[w] = A + 2\lambda B(x, \cdot)$  die Fréchet-ableitung von  $F$  an der Stelle  $w$ .

a) Es sei  $\beta$  die Konstante zu  $x$  aus IV.a und

$$(2.14) \quad 2|\lambda| \beta < 1.$$

Dann existiert die koniare Inverse  $f^{-1}: Y \rightarrow U$ , wobei

$$(2.15) \quad \|f^{-1}\| \leq \frac{1}{1-2|\lambda|\beta}.$$

b) Es sei  $Y$  ein reeller Hilbertraum mit dem inneren Produkt  $(\cdot, \cdot)$  und  $\lambda \geq 0$ ; ferner existiere eine zu  $x$  gehörige Konstante  $\beta^* \in \mathbb{R}$ , so daß (neben IV.a)

$$(2.16) \quad \forall u \in U: -(Lu, B(x, u)) \leq \beta^* \|Lu\|^2$$

$$(2.17) \quad 2\lambda\beta^* < 1.$$

Dann existiert ebenfalls die koniare Inverse  $f^{-1}$  von  $f$ , wobei nun

$$(2.18) \quad \|f^{-1}\| \leq \frac{1}{1-2\lambda\beta^*}.$$

### Beweis

a) Nach Lemma 3 ist  $f = T_1 + T_2$  mit  $T_1 := A$  und  $T_2 := 2\lambda B(x, \cdot)$ .  
Bezüglich der Normen  $\|\cdot\|_L$  in  $U$  und  $\|\cdot\|$  in  $Y$  sind  $T_1$  und  $T_2$  koniar, wobei nach Lemma 1.a  $\|T_1\| = 1$  und  $\|T_2\| \leq 2|\lambda|\beta$ . Ferner existiert  $T_1^{-1} = A^{-1}$  mit  $\|T_1^{-1}\| = 1$  und  $\|T_1^{-1} T_2\| \leq \|T_1^{-1}\| \|T_2\| \leq 2|\lambda|\beta$ .  
Damit folgt aber die Aussage des Satzes unmittelbar aus Lemma 4 mit  $\tau := 2|\lambda|\beta$ .

b) Zunächst wird mit  $Y$  auch  $U$  ein Hilbertraum, wenn wir entsprechend zu (1.10) auf  $U$  das innere Produkt  $(\cdot, \cdot)_L$  erklären durch

$$(2.19) \quad \forall u, v \in U: (u, v)_{\mathcal{L}} := (Lu, Lv) .$$

Aus (2.16) folgt, wegen  $\lambda \geq 0$  mit  $m := 1 - 2\lambda\beta^*$ :

$$(2.20) \quad \forall u \in U: (Lu, Lu + 2\lambda B(x, u)) \geq m(Lu, Lu) = m\|u\|_{\mathcal{L}}^2$$

Ferner folgt aus der Schwarzschen Ungleichung (siehe Kapitel II.1) und nach IV.a:

$$\begin{aligned} (2.21) \quad \forall u, v \in U: \quad & |(Lu, Lv + 2\lambda B(x, v))| \leq \|Lu\| \, \|Lv + 2\lambda B(x, v)\| \\ & \leq \|Lu\| (\|Lv\| + 2|\lambda| \|B(x, v)\|) \\ & \leq \|Lu\| (\|Lv\| + 2|\lambda| |\beta| \|Lv\|) \\ & = (1 + 2|\lambda| |\beta|) \|u\|_{\mathcal{L}} \, \|v\|_{\mathcal{L}} \end{aligned}$$

Mit (2.20) und (2.21) erfüllt das durch

$$(2.22) \quad \forall u, v \in U: d(u, v) := (Lu, Lv + 2\lambda B(x, v)) = (Lu, fv)$$

definierte bilineare Funktional  $d: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  die Voraussetzungen des Lemmas von LAX-MILGRAM.

Zu vorgegebenem  $y \in Y$  definieren wir nun ein lineares Funktional  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$(2.23) \quad \forall u \in U: g(u) := (Lu, y) .$$

$g$  ist beschränkt, da nach der Schwarzschen Ungleichung

$$(2.24) \quad \forall u \in U: |g(u)| \leq \|Lu\| \, \|y\| = \|y\| \, \|u\|_{\mathcal{L}} .$$

Somit existiert zu  $y$  genau ein Element  $v_y \in U$  mit

$$(2.25) \quad \forall u \in U: g(u) = d(u, v_y) \quad \text{bzw.} \quad (Au, y) = (Au, f v_y) .$$

Da  $A$  surjektiv ist, ist (2.25) gleichbedeutend mit

$$(2.26) \quad \forall s \in Y: (s, y - f v_y) = 0 .$$

Hieraus folgt aber  $f v_y = y$ .

Damit ist die Invertierbarkeit von  $f$  bewiesen. Die Beschränktheit mit der Abschätzung (2.18) erhalten wir unmittelbar aus Lemma 5, wenn wir auf (2.20) die Schwarzsche Ungleichung anwenden und durch  $\|Lu\| = \|u\|_{\mathcal{L}}$  kürzen. ▲

### Bemerkungen

1. Im Gegensatz zu Lemma 5 sind (a) und (b) aus Satz 1 lediglich hinreichende Kriterien.
2. In der Regel muß bei der Anwendung von Lemma 4 durch Aufspaltung der Norm  $\|T_1^{-1} T_2\|$  eine Verschlechterung in Kauf genommen werden. Es ist gerade ein Vorzug der gewählten Normierung, daß dies hier nicht der Fall ist, indem für  $u \in U$   $\|T_1^{-1} T_2 u\|_L = \|LA^{-1} T_2 u\| = \|T_2 u\|$  und damit  $\|T_1^{-1} T_2\| = \|T_2\| = \|T_1^{-1}\| \|T_2\|$ .  
(Man beachte:  $A^{-1} T_2 u \in U$ ,  $\|T_1^{-1}\| = 1$ )
3. In Lemma 4 und in Satz 1.a geht die Richtung von  $\lambda \in \mathbb{C}$  nicht ein. Diese Allgemeinheit wirkt sich andererseits so aus, daß die Existenz der koniaren Inversen von  $f = f_\lambda$  für ein bestimmtes  $\lambda$  nur dann mit Satz 1.a nachgewiesen werden kann, wenn  $f_\mu = A + 2\mu B(x, \cdot)$  für alle Parameter  $\mu \in \mathbb{C}$  mit  $|\mu| \leq |\lambda|$  eine koniare Inverse besitzt.
4. Das Kriterium aus Satz 1.b bezieht sich zwar nur auf reelle Parameterwerte, berücksichtigt jedoch gegenüber der Aussage aus (a) das Vorzeichen von  $\lambda$ ; der Fall  $\lambda \leq 0$  kann durch Übergang von  $B$  zu  $-B$  erfaßt werden. Mit (2.16) kann unter Umständen der speziellen Struktur von  $L$  und  $B$  Rechnung getragen werden. Insbesondere ist der Fall  $\beta^* \leq 0$  möglich, so daß die einschneidende Bedingung (2.17) entfällt. Andererseits schließt (b) die Aussage von (a) ein, da wegen  $|(Lu, B(x, u))| \leq \|Lu\| \|B(x, u)\| \leq \beta \|Lu\|^2$  stets die Wahl  $\beta^* := \beta$  möglich bleibt.

### 3. Aufstellung von geeigneten Iterationsverfahren

Nach Abschnitt 2 können wir davon ausgehen, daß zumindest für betragsmäßig kleines  $\lambda$  und für gewisse  $u \in U$  die koniare Inverse von  $f = F'[u]$  existiert. Zur Bestimmung einer Nullstelle von  $F$  bietet sich dann von daher das Newton-Verfahren (NV) in Banachräumen an.

Wir setzen zur Abkürzung für  $n \in \mathbb{N}$  und  $u_n \in U$ :

$$(3.1) \quad F_n := F(u_n) = Au_n + \lambda B(x_{M_n} + u_n, x_{M_n} + u_n) + s$$

$$(3.2) \quad f_n := F'[u_n] = A + 2\lambda B(x_M + u_n, \cdot)$$

$$(3.3) \quad x_n := x_M + u_n$$

$u_0$  können wir dabei ohne Einschränkung auf Null setzen, da wir bei der Wahl von  $x_M$  noch die nötige Freiheit besitzen.

Wir setzen im folgenden die jeweilige Existenz von  $f_n^{-1}$  voraus (vergl. hierzu Abschnitt 4). Mit den obigen Bezeichnungen hat dann das NV die folgende Gestalt:

$$(3.4) \quad \forall n \in \mathbb{N}: u_n := u_{n-1} - f_{n-1}^{-1} F_{n-1} \quad (\text{vergl. z.B. [29]}).$$

Das NV läßt sich auf verschiedene Weise geeignet modifizieren. Wir betrachten hier die beiden folgenden Vereinfachungen:

Bei jedem Iterationsschritt wird die Inverse vom ersten Schritt benutzt, so daß

$$(3.5) \quad \forall n \in \mathbb{N}: u_n := u_{n-1} - f_0^{-1} F_{n-1}.$$

Bei jedem Schritt wird die Inverse von  $F'[u_n]$  für  $\lambda = 0$ , also  $A^{-1}$  benutzt, so daß

$$(3.6) \quad \forall n \in \mathbb{N}: u_n := u_{n-1} - A^{-1} F_{n-1}.$$

Bekanntlich konvergiert das NV unter gewissen Voraussetzungen quadratisch. Diese Eigenschaft geht mit diesen Vereinfachungen verloren. Allerdings zeigt sich, daß (3.5) und (3.6) unter denselben Bedingungen konvergieren wie (3.4) (vergl. Abschnitt 5). Wir bezeichnen (3.5) mit NV1 und (3.6) mit NVO oder auch mit SA (s.u.).

Da bereits die dritte Ableitung von  $F$  verschwindet, drängen sich auch Verfahren höherer Ordnung auf. Wir betrachten ein Verfahren dritter Ordnung, nämlich das Tschebyscheff-Verfahren (TV), wo mit

$$F''_{n-1} := F''[u_{n-1}]:$$

$$(3.7) \quad \forall n \in \mathbb{N}: u_n := u_{n-1} + c_{n-1} - \frac{1}{2} f_{n-1}^{-1} F''_{n-1}(c_{n-1}, c_{n-1}) \quad \text{mit}$$

$$c_{n-1} := - f_{n-1}^{-1} F_{n-1} \quad (\text{vergl. DÖRING [21]}).$$

In unserem Fall, wo  $F$  aus einem Linear- und einem Bilinearteil besteht, haben diese Verfahren eine spezielle Form.

Hierzu gilt

Lemma 7

Die einzelnen Verfahren ergeben folgende Rekursionen zur Berechnung der jeweiligen Iterierten  $u_n$  bzw.  $x_n$  und des zugehörigen Funktionswerts  $F_n$  (vergl. (3.1)) für  $n \in \mathbb{N}$ :

a) Beim NVO (SA)

$$(3.8) \quad x_n = x_{n-1} + c_{n-1} \quad \text{mit} \quad c_{n-1} \quad \text{aus}$$

$$Ac_{n-1} = -F_{n-1}$$

$$(3.9) \quad F_n = \lambda [B(x_n, x_n) - B(x_{n-1}, x_{n-1})]$$

b) Beim NV1

$$(3.10) \quad u_n = u_{n-1} + c_{n-1} \quad \text{mit} \quad c_{n-1} \quad \text{aus}$$

$$Ac_{n-1} + 2\lambda B(x_M, c_{n-1}) = -F_{n-1}$$

$$(3.11) \quad F_n = \lambda [B(u_n, u_n) - B(u_{n-1}, u_{n-1})]$$

c) Beim NV

$$(3.12) \quad x_n = x_{n-1} + c_{n-1} \quad \text{mit} \quad c_{n-1} \quad \text{aus}$$

$$Ac_{n-1} + 2\lambda B(x_{n-1}, c_{n-1}) = -F_{n-1}$$

$$(3.13) \quad F_n = \lambda B(c_{n-1}, c_{n-1})$$

d) Beim TV

$$(3.14) \quad x_n = x_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1} \quad \text{mit} \quad c_{n-1} \quad \text{und} \quad d_{n-1} \quad \text{aus}$$

$$Ac_{n-1} + 2\lambda B(x_{n-1}, c_{n-1}) = -F_{n-1}$$

$$Ad_{n-1} + 2\lambda B(x_{n-1}, d_{n-1}) = -\lambda B(c_{n-1}, c_{n-1})$$

$$(3.15) \quad F_n = \lambda [B(c_{n-1} + d_{n-1}, c_{n-1} + d_{n-1}) - B(c_{n-1}, c_{n-1})]$$

(Bei (a) - (d) wird ausgegangen von  $u_0 = 0$  ( $x_0 = x_M$ ) und  $F_0 : F(u_0) = \lambda B(x_M, x_M) + s$  mit  $s : Lx_M - r$ .)

Beweis

$$a) (3.6) \Rightarrow Au_n = Au_{n-1} - F_{n-1} = Au_{n-1} - [Au_{n-1} + \lambda B(x_{n-1}, x_{n-1}) + s]$$

$$\Rightarrow Au_n = -\lambda B(x_{n-1}, x_{n-1}) - s \Rightarrow$$

$$F_n = Au_n + \lambda B(x_n, x_n) + s = [-\lambda B(x_{n-1}, x_{n-1}) - s] + \lambda B(x_n, x_n) + s \Rightarrow (3.9).$$

$$(3.6) \Rightarrow A(u_n - u_{n-1}) = -F_{n-1} \Rightarrow (3.8)$$

$$(\text{Man beachte: } c_{n-1} = x_n - x_{n-1} = u_n - u_{n-1} \in U)$$

$$b) (3.5) \Rightarrow \underset{\text{Def. von } f_{n-1}}{Au_n + 2\lambda B(x_o, u_n)} = Au_{n-1} + 2\lambda B(x_o, u_{n-1}) - F_{n-1} \Rightarrow$$

$$Au_n + 2\lambda B(x_o, u_n) = Au_{n-1} + 2\lambda B(x_o, u_{n-1}) - [Au_{n-1} + \lambda B(x_{n-1}, x_{n-1}) + s]$$

$$= 2\lambda B(x_o, u_{n-1}) - \lambda B(x_o + u_{n-1}, x_o + u_{n-1}) - s$$

$$= -\lambda B(x_o, x_o) - \lambda B(u_{n-1}, u_{n-1}) - s$$

$$\Rightarrow F_n = Au_n + \lambda B(x_n, x_n) + s$$

$$= [-2\lambda B(x_o, u_n) - \lambda B(x_o, x_o) - \lambda B(u_{n-1}, u_{n-1}) - s] + \lambda B(x_o + u_n, x_o + u_n) + s$$

$$= [\dots] + \lambda B(x_o, x_o) + 2\lambda B(x_o, u_n) + \lambda B(u_n, u_n) + s \Rightarrow (3.11).$$

$$(3.5) \Rightarrow f_o(u_n - u_{n-1}) = -F_{n-1} \Rightarrow f_o c_{n-1} = -F_{n-1} \Rightarrow (3.10).$$

$$c) (3.6) \Rightarrow \underset{\text{Def. von } f_{n-1}}{Au_n + 2\lambda B(x_{n-1}, u_n)} = Au_{n-1} + 2\lambda B(x_{n-1}, u_{n-1}) - F_{n-1} \Rightarrow$$

$$Au_n + 2\lambda B(x_{n-1}, u_n) = Au_{n-1} + 2\lambda B(x_{n-1}, u_{n-1}) - [Au_{n-1} + \lambda B(x_{n-1}, x_{n-1}) + s]$$

$$= 2\lambda B(x_{n-1}, u_{n-1}) - \lambda B(x_{n-1}, x_{n-1}) - s$$

$$\Rightarrow F_n = [-2\lambda B(x_{n-1}, u_n) + 2\lambda B(x_{n-1}, u_{n-1}) - \lambda B(x_{n-1}, x_{n-1}) - s] + \lambda B(x_n, x_n) + s$$

$$= \lambda [-2B(x_{n-1}, u_n - u_{n-1}) + B(x_n, x_n) - B(x_{n-1}, x_{n-1})]$$

$$= \lambda [-2B(x_{n-1}, x_n - x_{n-1}) + B(x_n, x_n) - B(x_{n-1}, x_{n-1})]$$

$$= \lambda B(x_n - x_{n-1}, x_n - x_{n-1}) = \lambda B(c_{n-1}, c_{n-1}) \Rightarrow (3.13).$$

$$(3.6) \Rightarrow f_{n-1}(u_n - u_{n-1}) = -F_{n-1} \Rightarrow f_{n-1} c_{n-1} = -F_{n-1} \Rightarrow (3.12).$$

$$d) F''[u_n](c_{n-1}, c_{n-1}) = 2\lambda B(c_{n-1}, c_{n-1}) \underset{\text{Def. von } f_{n-1}}{\Rightarrow} (3.14).$$

$$(3.7) \Rightarrow f_{n-1}(u_n - u_{n-1}) = -F_{n-1} - \lambda B(c_{n-1}, c_{n-1}) \underset{u_n - u_{n-1} = x_n - x_{n-1}}{\Rightarrow}$$

$$A(u_n - u_{n-1}) + 2\lambda B(x_{n-1}, x_n - x_{n-1}) = -[Au_{n-1} + \lambda B(x_{n-1}, x_{n-1}) + s] - \lambda B(c_{n-1}, c_{n-1})$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow F_n &= Au_n + \lambda B(x_n, x_n) + s \\
 &= [-2\lambda B(x_{n-1}, x_n - x_{n-1}) - \lambda B(x_{n-1}, x_{n-1}) - \lambda B(c_{n-1}, c_{n-1}) - s] \\
 &\quad + \lambda B(x_n, x_n) + s \\
 &= \lambda [B(x_n, x_n) - 2B(x_{n-1}, x_n - x_{n-1}) - B(x_{n-1}, x_{n-1}) - B(c_{n-1}, c_{n-1})] \\
 &= \lambda [B(x_n - x_{n-1}, x_n - x_{n-1}) - B(c_{n-1}, c_{n-1})] \Rightarrow (3.15) \blacktriangle
 \end{aligned}$$

### Anmerkung

Es sei ausdrücklich betont, daß die in gleicher Weise bezeichneten  $n$ -ten Größen ab  $n \geq 1$  bei jedem Verfahren in der Regel einen anderen Wert besitzen werden (vergl. Bem. 3). An den Stellen, wo diesbezüglich Mißverständnisse auftreten könnten, werden wir entsprechend indizieren, z.B. schreiben wir dann  $c_1^{NV}$  für die erste "Newtonkorrektur" aus (3.12) etc.

### Bemerkungen

1. Die Form von  $F$  läßt für jedes der hier betrachteten Verfahren jeweils verschiedene äquivalente Iterationsvorschriften zu. Die hier angegebenen erscheinen für ein automatisch arbeitendes Programm am geeignetsten, denkt man an Rechenaufwand und Speicherplatz. Abgesehen von  $NV_1$  werden jeweils die Größen bereitgestellt, die vom Problem her relevant sind, nämlich  $x_n$  als Näherung für die gesuchte Lösung des Ausgangsproblems,  $F_n$  als Kontrollwert zum Vergleich mit Null und  $c_n$  bzw.  $d_n$  als Korrekturwert; diese sind bedeutsam für Fehlerabschätzung und Abbruchkriterien.

2. Wie der Beweis zu Lemma 7.a zeigt, ist (3.6) bzw. (3.8) äquivalent zu

$$(3.16) \quad u_n = -\lambda A^{-1} B(x_M + u_{n-1}, x_M + u_{n-1}) - A^{-1} s$$

Wir können NVO also auch dadurch verstehen, daß in der Gleichung  $F(u) = 0$  die Unbekannte  $u$  unter Benutzung von  $A^{-1}$  teilweise

separiert wird, um das Verfahren der sukzessiven Approximation (SA) anzuwenden. Bezüglich NVO = SA haben wir also lediglich lineare Konvergenz zu erwarten.

Zum Vergleich mit dem NV gilt:

$$(3.17) \quad A c_n^{SA} + 2\lambda B(x_{n-1}^{SA}, c_{n-1}^{SA}) = -\lambda B(c_{n-1}^{SA}, c_{n-1}^{SA})$$

$$(3.18) \quad A c_n^{NV} + 2\lambda B(x_n^{NV}, c_n^{NV}) = -\lambda B(c_{n-1}^{NV}, c_{n-1}^{NV}) \quad (n \geq 1)$$

Der Unterschied liegt also in der Aktualität des Arguments von B auf der linken Seite der Gleichung.

Die Bedeutung von SA gegenüber den Verfahren höherer Ordnung liegt darin, daß es in der Regel weit einfacher durchzuführen ist, speziell wenn  $A^{-1}$  explizit bekannt ist. Bei den übrigen Verfahren ist dagegen die zu berechnende Größe stets auch Argument von B; je nach der Form von B kann dies die Auflösung von (3.10), (3.12) und (3.14) beträchtlich erschweren (vergl. Kap. IV u. V), auch wenn die Auflösbarkeit theoretisch mit der Existenz von  $f_n^{-1}$  gesichert ist.

3. Nach Definition ist stets  $x_1^{NV} = x_1^{NV1}$ . Darüber hinaus gilt hier wegen der speziellen Form von F:

$$(3.19) \quad x_1^{TV} = x_2^{NV1}$$

Zur Berechnung von  $x_1^{TV}$  sind gerade die gleichen Rechenschritte durchzuführen wie zur Berechnung von  $x_2^{NV1}$ , da

$$c_0^{TV} = c_0^{NV1} = u_1^{NV1} \quad (u_0 = 0) \quad \text{und}$$

$$d_0^{TV} = -\lambda f_0^{-1} B(c_0^{TV}, c_0^{TV}) = -\lambda f_0^{-1} B(u_1^{NV1}, u_1^{NV1}) = -f_0^{-1} F_1 = c_1^{NV1}$$

Definiert man das Verfahren TV1 dadurch, daß man wie bei NV1 in jedem TV-Schritt anstelle von  $f_{n-1}^{-1}$  die Inverse von  $f_0$  benutzt, so läßt sich zeigen, daß für alle  $n \in \mathbb{N}_0$   $x_n^{TV1} = x_{2n}^{NV1}$ . Das "echte" TV ist im Vergleich dazu noch stärker einzustufen.

4. Wesentlich bei all diesen Verfahren ist die Linearisierung, wobei davon ausgegangen wird, daß die entstehenden linearen Probleme relativ einfach zu lösen sind. Indem F bilinear ist, bieten sich in natürlicher Weise noch die beiden folgenden Linearisierungen an:

$$(3.20) \quad Au_n + \lambda B(x_M, u_n) + \lambda B(u_n, u_{n-1}) = -\lambda B(x_M, x_M + u_{n-1}) - s$$

$$(3.21) \quad Au_n + 2\lambda B(x_M, u_n) + \lambda B(u_n, u_{n-1}) = -\lambda B(x_M, x_M) - s$$

(vergl. Mc FARLAND [36])

Diese gehen aus von der Existenz der Inversen von

$A + \lambda B(x_M + u_{n-1}, \cdot)$  bzw. von  $A + 2\lambda B(x_M, \cdot) + \lambda B(u_{n-1}, \cdot)$ . Formal erhält man sie, indem man  $B(x_M + u, x_M + u) = B(x_M, x_M) + 2B(x_M, u) + B(u, u)$  ersetzt durch  $B(x_M + u_{n-1}, x_M + u_n)$  bzw. durch  $B(x_M, x_M) + 2B(x_M, u_n) + B(u_{n-1}, u_n)$ . Da diese Verfahren an die Bilinearität des Operators gebunden sind, bezeichnen wir sie mit BIL1 bzw. BIL2. Sie werden hier lediglich vollständigkeithalber erwähnt, wobei zu beachten ist, daß in der Tat beide Verfahren von den zuvor betrachteten verschieden sind, wenn auch

$$(3.22) \quad x_1^{BIL2} := x_M + u_1^{BIL2} = x_1^{NV}$$

(Man beachte:  $u_0 = 0$  und  $s + \lambda B(x_M, x_M) = F_0$ )

#### 4. Konvergenzsätze

Wir wollen nun Kriterien herleiten, unter denen die in Abschnitt 3 zunächst nur rein formal betrachteten Verfahren wohldefiniert und konvergent sind. Die ersten beiden Sätze gehen von folgenden allgemeinen Voraussetzungen aus:

(4.1)  $U, Y$  Banachräume;  $D$  eine offene, konvexe Teilmenge von  $U$ ;  $v_0 \in D$

(4.2)  $F: D \rightarrow Y$  mindestens einmal fréchetdifferenzierbar

Zu  $v_0$  aus (4.1) bezeichne ferner  $S_0(r)$  die offene Kugelumgebung von  $v_0$  vom Radius  $r$ , d.h.

$$(4.3) \quad S_0(r) := \{v \in U \mid \|v - v_0\| \leq r\}.$$

#### Satz 2 (Satz über das modifizierte NV)

Es sei  $\Gamma: Y \rightarrow U$  eine koniare Abbildung mit koniarer Inversen und  $r, \zeta, \delta, k$  nichtnegative reelle Zahlen, so daß  $S_0(r) \subset D$  und folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

$$(V1) \quad \|\Gamma F(v_o)\| \leq \zeta$$

$$(V2) \quad \|I - \Gamma F'[\bar{v}_o]\| \leq \delta < 1$$

$$(V3) \quad \forall u, v \in S_o(r): \|\Gamma F'[u] - \Gamma F'[v]\| \leq k \|u - v\|$$

$$(V4) \quad h := \frac{k\zeta}{(1-\delta)^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$(V5) \quad r \geq r_- := (1 - \sqrt{1-2h}) \frac{\zeta}{h(1-\delta)}$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(B1) Das "modifizierte NV"  $v_{n+1} := v_n - \Gamma F(v_n)$  definiert ausgehend von  $v_o$  eine Folge in  $S_o(r)$ .

(B2) Diese Folge konvergiert gegen eine Nullstelle  $v^*$  von  $F$ .

(B3)  $v^*$  aus (B2) liegt in  $\overline{S_o(r_-)}$  (Abschluß von  $S_o(r_-)$ ) und ist als Nullstelle von  $F$  eindeutig bestimmt in  $S_o(r_+) \cap D$  mit  $r_+ := (1 + \sqrt{1-2h}) \frac{\zeta}{h(1-\delta)}$ .

(B4) Für  $n \geq 1$  gilt die apriori Fehlerabschätzung:

$$\|v^* - v_n\| \leq (1 - (1-\delta)\sqrt{1-2h})^{n-1} \frac{\zeta}{(1 - (1-\delta)h\sqrt{1-2h})} \frac{\zeta}{h(1-\delta)}$$

(B5) Für  $n \geq 1$  gilt die aposteriori-Fehlerabschätzung:

$$\|v^* - v_n\| \leq \bar{\theta}_{n-1} \zeta_{n-1} \quad \text{mit} \quad \bar{\theta}_{n-1} := \frac{1 - (1-\delta_{n-1})h_{n-1}\sqrt{1-2h_{n-1}}}{(1-\delta_{n-1})h_{n-1}}, \text{ wobei}$$

$$\delta_o := \delta, \quad \zeta_o := \zeta, \quad h_o := h \quad \text{und für} \quad n \geq 2:$$

$$\delta_{n-1} := \|I - \Gamma F'[\bar{v}_{n-1}]\| \leq \delta_{n-2} + k \zeta_{n-2}$$

$$\zeta_{n-1} := \|v_n - v_{n-1}\| \leq \frac{k}{2} \zeta_{n-2}^2 + \delta_{n-2} \zeta_{n-2}$$

$$h_{n-1} := \frac{\zeta_{n-1}^k}{(1-\delta_{n-1})^2} \leq \frac{1}{2} h_{n-2} \frac{(1-\delta_{n-2})^2 h_{n-2} + 2\delta_{n-2}}{(1-(1-\delta_{n-2})h_{n-2})^2}$$

### Beweis

Vom behandelten Gegenstand her entspricht dieser Satz gerade den Sätzen 1 und 2 in § 2.XVIII von KANTOROWITSCH-AKILOW [29] S. 576-577. Demgegenüber neu sind die Verallgemeinerung bezüglich (V3) und die Fehlerschranken aus (B4) und (B5). Die Verallgemeinerung ist ohne Belang, wenn  $F$  - wie in unserem Fall - zweimal fréchetdifferenzierbar ist (die bestmögliche Wahl für  $k$  ist dann das Supremum von  $\|\Gamma F''[u]\|$ , gebildet über alle  $u \in S_o(r)$ ).

Ferner hat diese Verallgemeinerung keinen Einfluß auf den Beweis von (B1) bis (B3), die wir deshalb aus dem oben angeführten Satz 2 in [29] übernehmen dürfen. Zu zeigen bleiben (B4) und (B5).

Wir bemerken zunächst, daß  $v^*$  Fixpunkt von  $G$  ist und  $v_{n+1} = G(v_n)$ , wenn  $G: D \rightarrow U$  definiert ist durch

$$(4.4) \quad G(u) := u - \Gamma F(u)$$

Hinsichtlich (B4) verfolgen wir den Beweisgang von KANTOROWITSCH-AKILOW [29] S. 576, wonach die Fixpunktgleichung  $u = G(u)$  majorisiert wird durch  $t = \varphi(t)$  mit

$$(4.5) \quad \varphi(t) := \frac{k}{2} t^2 + \delta t + \zeta$$

und für  $k = O(1)n$ :

$$(4.6) \quad \|v^* - v_n\| \leq t^* - t_n \leq \varphi'(t^*)(t^* - t_{n-1}) \leq \dots \leq [\varphi'(t^*)]^k (t^* - t_{n-k})$$

$$\text{wobei: } t^* := r_-; t_n := \varphi(t_{n-1}), t_0 := 0$$

Indem wir diese Abschätzung nicht bis  $t_0 = 0$ , sondern lediglich bis  $t_1 = \zeta$  abwickeln, erhalten wir (B4) vermöge:

$$\begin{aligned} \|v^* - v_n\| &\leq [\varphi'(t^*)]^{n-1} (t^* - t_1) = (kr_- + \delta)^{n-1} (r_- - \zeta) \\ &= (k(1 - \sqrt{1-2h}) \frac{\zeta}{h(1-\delta)} + \delta)^{n-1} \frac{1 - \sqrt{1-2h-h(1-\delta)}}{h(1-\delta)} \zeta \\ &= (1 - (1-\delta)\sqrt{1-2h})^{n-1} \bar{\Theta} \zeta \quad \text{mit } \bar{\Theta} := \bar{\Theta}_0 \quad \text{aus (B5).} \\ &\quad \text{Def. von } h \end{aligned}$$

Die durch (4.4) definierte Abbildung  $G$  ist wie  $F$  auf  $D$  fréchet-differenzierbar, wobei wegen der Linearität von  $\Gamma$  für  $u \in D$ :

$$(4.7) \quad G'[u] = I - \Gamma F'[u]$$

Nach (V3) ist dann

$$(4.8) \quad \forall u, v \in S_0(r): \|G'(u) - G'(v)\| \leq k \|u - v\|.$$

Ferner notieren wir bezüglich der in (B5) definierten Konstanten für  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(4.9)_n \quad \|G'(v_n)\| \leq \delta_n$$

$$(4.10)_n \quad \forall v \in S_0(r): \|G(v_{n-1}) - G(v)\| \leq \frac{k}{2} \|v - v_{n-1}\|^2 + \delta_{n-1} \|v - v_{n-1}\|$$

$$(4.11)_n \quad \zeta_n \leq \frac{k}{2} \zeta_{n-1}^2 + \delta_{n-1} \zeta_{n-1}$$

$$(4.12)_n \quad \|v^* - v_n\| \leq \frac{k}{2} \|v^* - v_{n-1}\|^2 + \delta_{n-1} \|v^* - v_{n-1}\|$$

$$(4.13)_n \quad \delta_n \leq \delta_{n-1} + k \zeta_{n-1}$$

$$(4.14)_n \quad \delta_{n-1} < 1$$

$$(4.15)_n \quad h_{n-1} \leq \frac{1}{2}$$

$$(4.16)_n \quad \|v^* - v_n\| \leq \frac{1 - \delta_{n-1}}{k} - \zeta_{n-1} \leq \frac{1 - \delta_n}{k}$$

(4.9)<sub>n</sub> folgt mit (4.7) unmittelbar aus der Definition von  $\delta_n$ .

(4.10)<sub>n</sub> erhalten wir aus der Verallgemeinerung des Taylorschen Satzes auf Operatoren (s. z.B. KANTOROWITSCH-AKILOW [29] S. 539-540), wonach

$$\begin{aligned} G(v_{n-1}) - G(v) &= \int_0^1 G'[v + t(v_{n-1} - v)](v_{n-1} - v) dt \\ &= \int_0^1 (G'[v + t(v_{n-1} - v)] - G'[v_{n-1}])(v_{n-1} - v) dt + G'[v_{n-1}](v_{n-1} - v). \end{aligned}$$

Durch Bildung und Aufspalten der Norm folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \|G(v_{n-1}) - G(v)\| &\leq \left( \int_0^1 \|G'[v + t(v_{n-1} - v)] - G'[v_{n-1}]\| dt \right) \|v_{n-1} - v\| \\ &\quad + \int_0^1 \|G'[v_{n-1}]\| \|v_{n-1} - v\| dt \\ (4.8), (4.9)_{n-1} \quad &\leq k \|v_{n-1} - v\| \left( \int_0^1 \|v + t(v_{n-1} - v) - v_{n-1}\| dt + \delta_{n-1} \|v_{n-1} - v\| \right) \\ &= k \int_0^1 (1-t) dt \|v_{n-1} - v\|^2 + \delta_{n-1} \|v_{n-1} - v\| \Rightarrow (4.10)_n. \end{aligned}$$

(4.11)<sub>n</sub> folgt aus (4.10)<sub>n</sub> mit  $v := v_n$ , indem

$$\zeta_n = \|v_{n+1} - v_n\| = \|G(v_n) - G(v_{n-1})\|.$$

(4.12)<sub>n</sub> folgt aus (4.10)<sub>n</sub> mit  $v := v^*$ , indem

$$\|v^* - v_n\| = \|G(v^*) - G(v_{n-1})\|.$$

(4.13)<sub>n</sub> folgt durch

$$\delta_n = \|G'[v_n]\| \leq \|G'[v_{n-1}]\| + \|G'[v_n] - G'[v_{n-1}]\| \stackrel{(4.8)}{\leq} \delta_{n-1} + k \|v_n - v_{n-1}\|.$$

(4.14)<sub>n</sub>, (4.15)<sub>n</sub> und (4.16)<sub>n</sub> zeigen wir durch vollständige Induktion über n:

(4.14)<sub>1</sub> und (4.15)<sub>1</sub> gelten nach (V2) bzw. (V4). Hinsichtlich (4.16)<sub>1</sub> erhalten wir aus (B4):

$$\begin{aligned} \|v^* - v_1\| &\leq \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h(1-\delta)} \zeta - \zeta \stackrel{\text{Def. von } h}{=} (1 - \sqrt{1-2h}) \frac{1-\delta}{k} - \zeta \leq \frac{1-\delta}{k} - \zeta \\ &\stackrel{(4.13)_1}{\leq} \frac{1 - (\delta_1 - k\zeta)}{k} - \zeta = \frac{1-\delta_1}{k} \end{aligned}$$

Bezüglich des Induktionsschlusses auf  $n+1$  gilt:

$$(4.14)_n, (4.15)_n \Rightarrow 0 \leq \frac{k\zeta_{n-1}}{1-\delta_{n-1}} \leq \frac{1}{2} (1-\delta_{n-1}) < 1 \Rightarrow$$

$$k\zeta_{n-1} + \delta_{n-1} < 1 \stackrel{(4.13)_n}{\Rightarrow} \delta_n < 1 \Rightarrow (4.14)_{n+1}.$$

Nach (4.14)<sub>n+1</sub> ist  $h_n$  wohldefiniert, wobei wegen (4.11)<sub>n</sub> und (4.13)<sub>n</sub>

$$h_n = \frac{k\zeta_n}{(1-\delta_n)^2} \leq \frac{k \left( \frac{k}{2} \zeta_{n-1}^2 + \delta_{n-1} \zeta_{n-1} \right)}{(1-\delta_{n-1} - k\zeta_{n-1})^2} \stackrel{\text{Def. von } h_{n-1}}{=} \frac{\frac{1}{2}(1-\delta_{n-1})^2 h_{n-1}^2 + \delta_{n-1} h_{n-1}}{(1 - (1-\delta_{n-1})h_{n-1})^2}.$$

Hieraus folgt zunächst die in (B5) behauptete Abschätzung von  $h_n$ ; ferner zeigt eine einfache Rechnung, daß dieser Ausdruck unter  $\frac{1}{2}$  bleibt und  $h_{n-1} \leq \frac{1}{2}$  ist, womit auch  $h_n \leq \frac{1}{2}$ .

Ebenso stellt man fest, daß  $h_n \leq \frac{1}{2}$  äquivalent ist zu

$$\frac{1}{2} k \left( \frac{1-\delta_n}{k} \right)^2 + \delta_n \frac{1-\delta_n}{k} \leq \frac{1-\delta_n}{k} - \zeta_n.$$

Hieraus folgt aber (4.16)<sub>n+1</sub>, indem:

$$\begin{aligned} \|v^* - v_{n+1}\| &\stackrel{(4.12)_{n+1}}{\leq} \frac{k}{2} \|v^* - v_n\|^2 + \delta_n \|v^* - v_n\| \\ &\stackrel{(4.16)_n}{\leq} \frac{k}{2} \left( \frac{1-\delta_n}{k} \right)^2 + \delta_n \left( \frac{1-\delta_n}{k} \right) \leq \frac{1-\delta_n}{k} - \zeta_n \\ &\stackrel{(4.13)_{n+1}}{\leq} \frac{1-\delta_{n+1}}{k} \end{aligned}$$

Zum Beweis der in (B5) angegebenen Abschätzung für  $\|v^* - v_n\|$  schätzen wir in (4.12)<sub>n</sub>  $\|v^* - v_{n-1}\|$  ab durch  $\|v^* - v_n\| + \|v_n - v_{n-1}\|$  und erhalten

mit  $\zeta_{n-1} = \|v_n - v_{n-1}\|$  und  $t_n := \|v^* - v_n\|$  :

$$t_n \leq \frac{k}{2} (t_n + \zeta_{n-1})^2 + \delta_{n-1} (t_n + \zeta_{n-1})$$

Durch quadratische Ergänzung folgt:

$$\left(\frac{1-\delta_{n-1}}{k}\right)^2 \left(1 - 2 \frac{\zeta_{n-1}^k}{(1-\delta_{n-1})^2}\right) \leq \left(\frac{1-\delta_{n-1}}{k} - \zeta_{n-1} - t_n\right)^2$$

Nach (4.14)<sub>n</sub>, (4.15)<sub>n</sub> und (4.16)<sub>n</sub> sind alle Ausdrücke innerhalb der Klammern nicht negativ, so daß nach Wurzelziehen:

$$\begin{aligned} t_n &\leq \frac{1-\delta_{n-1}}{k} - \zeta_{n-1} - \frac{1-\delta_{n-1}}{k} \sqrt{1-2h_{n-1}} \\ &= \frac{\zeta_{n-1}}{1-\delta_{n-1}} \left[ \frac{(1-\delta_{n-1})^2}{k\zeta_{n-1}} - (1-\delta_{n-1}) - \frac{(1-\delta_{n-1})^2}{k\zeta_{n-1}} \sqrt{1-2h_{n-1}} \right] \\ &= \frac{1-(1-\delta_{n-1})h_{n-1}-\sqrt{1-2h_{n-1}}}{(1-\delta_{n-1})h_{n-1}} \zeta_{n-1} \end{aligned}$$

Damit ist (B5) bewiesen. ▲

### Bemerkungen

1. Die apriori-Schranke aus (B4) ist eine wesentliche Verbesserung gegenüber der Schranke von KANTOROWITSCH-AKILOW [29]; letztere ist für den Fall  $\delta = 0$  um den Faktor Zwei größer. Für  $\delta = 0$  sind die Aussagen von Satz 1 mit Ausnahme von (B5) Inhalt eines Satzes von ANDREW ([6], Theorem 1). Insofern ist Satz 2 auch als Verallgemeinerung und Ergänzung dieses Theorems anzusehen.
2. Die Voraussetzungen von Satz 1 implizieren speziell die Voraussetzungen des Theorems 1 in [6] (vergl. Bemerkung 1), d.h. es existiert die koniare Inverse  $\Gamma_0$  von  $F'[v_0]$  und es gelten:

$$(4.17) \quad \|\Gamma_0\| \leq \frac{\|\Gamma\|}{1-\delta}$$

$$(4.18) \quad \|\Gamma_0 F(v_0)\| \leq \zeta' := \frac{\zeta}{1-\delta}$$

$$(4.19) \quad \forall v \in S_0(r): \|I - \Gamma_0 F'[v]\| \leq k' \|v - v_0\| \quad \text{mit} \quad k' := \frac{k}{1-\delta}$$

Die Existenz von  $\Gamma_0$  mit (4.17) folgt nach Lemma 4 aus den Eigenschaften von  $\Gamma$  (man setze  $T_1 := \Gamma^{-1}$  und  $T_2 := F'[v_0] - \Gamma^{-1}$ ).

Wegen  $\Gamma_o = (F'[v_o])^{-1}$  gilt bezüglich (4.18):

$$\begin{aligned}\Gamma_o F(v_o) &= (I - \Gamma_o F'[v_o]) \Gamma_o F(v_o) + \Gamma_o F(v_o) \Rightarrow \\ \|\Gamma_o F(v_o)\| &\leq \|I - \Gamma_o F'[v_o]\| \|\Gamma_o F(v_o)\| + \|\Gamma_o F(v_o)\| \\ &\stackrel{(V1), (V2)}{\leq} \delta \|\Gamma_o F(v_o)\| + \zeta\end{aligned}$$

und bezüglich (4.19):

$$\begin{aligned}I - \Gamma_o F'[v] &= (I - \Gamma_o F'[v_o])(I - \Gamma_o F'[v]) + \Gamma_o F'[v_o](I - \Gamma_o F'[v]) \\ &= (I - \Gamma_o F'[v_o])(I - \Gamma_o F'[v]) + \Gamma_o F'[v_o] - \Gamma_o F'[v] \\ \Rightarrow \|I - \Gamma_o F'[v]\| &\leq \|I - \Gamma_o F'[v_o]\| \|I - \Gamma_o F'[v]\| + \|\Gamma_o F'[v_o] - \Gamma_o F'[v]\| \\ &\stackrel{(V2), (V3)}{\leq} \delta \|I - \Gamma_o F'[v]\| + k \|v - v_o\|\end{aligned}$$

3. Nach (4.7), (4.8) und (V2) folgen für alle  $v \in S_o(r_-)$ :

$$\begin{aligned}\|G'[v]\| &\leq \|G'[v] - G'[v_o]\| + \|G'[v_o]\| \leq k \|v - v_o\| + \delta \\ &\leq k r_- + \delta =: p\end{aligned}$$

Nach dem Fixpunktprinzip für  $G$  folgt daraus im Falle  $p < 1$  die übliche Fehlerabschätzung

$$(4.20) \quad \|v^* - v_n\| \leq \frac{p}{1-p} \|v_n - v_{n-1}\|$$

In der Regel ergibt jedoch (B5) eine schärfere Abschätzung, denn mit ihr wird die Verkleinerung der zu betrachtenden Kugelumgebung berücksichtigt.

Im Hinblick auf den folgenden Satz 2 sei erwähnt, daß aus (B4) gerade formal die aposteriori-Fehlerabschätzung für das NV resultiert, wenn man - der Definition des NV entsprechend - in (B4) für alle  $n \in \mathbb{N}$   $\delta_{n-1} := 0$  setzt (s.u.).

### Satz 3 (Satz über das NV)

Es existiere die koniare Inverse  $\Gamma_o = f_o^{-1}$  von  $f_o := F'[v_o]$  und nichtnegative reelle Zahlen  $\zeta, \kappa, K$ , so daß folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

$$(V1) \quad \|\Gamma_o F(v_o)\| \leq \zeta \quad \text{und} \quad S_o(r) \subset D \quad \text{mit} \quad r := 2\zeta$$

$$(V2) \quad \|\Gamma_0\| \leq \kappa$$

$$(V3) \quad \forall u, v \in S_0(r): \|F'[u] - F'[v]\| \leq K \|u-v\|$$

$$(V4) \quad h := \zeta \kappa K \leq \frac{1}{2}$$

Dann gelten:

(B1) Das NV  $v_{n+1} = v_n - f_n^{-1} F(v_n)$  mit  $f_n^{-1} := (F'[v_n])^{-1}$  definiert ausgehend von  $v_0$  eine Folge in  $S_0(r_-)$  mit  $r_- := (1-\sqrt{1-2h}) \frac{\zeta}{h} (\leq r)$ .

(B2) Diese Folge konvergiert gegen eine Nullstelle  $v^*$  von  $F$ .

(B3)  $v^*$  liegt in  $S_0(r_-)$  und ist einzige Nullstelle von  $F$  in  $S_0(r_+) \cap D$  mit  $r_+ := (1+\sqrt{1-2h}) \frac{\zeta}{h} (\leq r)$ .

(B4) Für  $n \geq 1$  gilt die apriori-Fehlerabschätzung:

$$\|v^* - v_n\| \leq \frac{2\sqrt{1-h}}{h} \frac{\theta^{2^n}}{1-\theta^{2^n}} \zeta \quad \text{mit} \quad \theta := \frac{1-\sqrt{1-2h}}{1+\sqrt{1-2h}}.$$

(B5) Für  $n \geq 1$  gilt die aposteriori-Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} \|v^* - v_n\| &\leq \theta_{n-1} \zeta_{n-1}, \quad \text{wobei} \\ \theta_0 &= \theta, \quad \zeta_0 = \zeta, \quad \kappa_0 := \kappa, \quad h_0 := h \quad \text{und} \quad \text{für } n \geq 1: \\ \theta_{n-1} &:= \frac{1-\sqrt{1-2h_{n-1}}}{1+\sqrt{1-2h_{n-1}}} = \frac{1-h_{n-1} - \sqrt{1-2h_{n-1}}}{h_{n-1}} \\ h_{n-1} &:= \zeta_{n-1} \kappa_{n-1} K \leq \frac{1}{2} \left( \frac{h_{n-2}}{1-h_{n-2}} \right)^2 \\ \zeta_{n-1} &:= \|v_n - v_{n-1}\| \\ \kappa_{n-1} &:= \|f_{n-1}^{-1}\| \leq \frac{\kappa_{n-2}}{1-h_{n-2}} \end{aligned}$$

Dieser Satz geht ebenfalls auf Kantorowitsch zurück. Die Besonderheit gegenüber Satz 6 aus KANTOROWITSCH-AKILOW [29] S. 572 besteht im wesentlichen wieder in den Fehlerschranken aus (B4) und (B5). Die aposteriori-Schranke stammt von DÖRING [20], die apriori-Schranke von GRAGG-TAPIA [26]. In [26] ist darüber hinaus die aposteriori-Schranke  $\theta^{2^n} \zeta_n$  angegeben; diese ist zwar einfacher, in der Regel aber auch etwas schlechter; denn sie beruht gerade darauf, daß man  $h_{n-1}$  nicht über das jeweils neu berechnete  $\zeta_{n-1}$  bestimmt, sondern durch  $\frac{1}{2} \left( \frac{h_{n-2}}{1-h_{n-2}} \right)^2$  abschätzt, womit  $\theta_{n-1} = \theta_{n-2}^2$ .

Für  $h < \frac{1}{2}$  sind die quadratische Konvergenz und die Stabilität (stetige Abhängigkeit von der Startnäherung) des Verfahrens gesichert. Hinsichtlich des Beweises von Satz 3 sei auf die oben zitierten Arbeiten verwiesen.

In unserem Fall ist  $F$  aus (1.22) auf  $U$  beliebig oft fréchetdifferenzierbar. Wir können also  $D := U$  setzen. Da ferner die zweite Ableitung bereits konstant ist, sind die Bedingungen bezüglich einer Kugel  $S_0(r)$ , auf der die Lipschitzkonstante für  $F'$  abzusichern ist, irrelevant. Wir erhalten somit für den hier betrachteten Fall:

#### Satz 4

Mit  $x_M \in M$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  und  $\gamma$  aus IV.b gelte:

$$(V1) \quad \forall u \in U: \|B(x_M, u)\| \leq \beta \|Lu\| \quad (\text{d.h. } \beta \text{ ist die Konstante zu } x_M \text{ aus IV.a)}$$

$$(V2) \quad \tau := 2|\lambda|\beta < 1$$

$$(V3) \quad h := \frac{2|\lambda|\gamma\xi}{(1-\tau)^2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad \xi := \|Lx_M + \lambda B(x_M, x_M) - r\|$$

Dann gelten

(B1) Das Ausgangsproblem (1.5)-(1.6) hat eine Lösung  $x^*$  mit

$$\|Lx^* - Lx_M\| \leq r_- := (1 - \sqrt{1-2h}) \frac{\xi}{h(1-\tau)}.$$

(B2) Ist  $z^*$  eine Lösung des Problems mit  $\|Lz^* - Lx_M\| \leq r_+ := \frac{1 + \sqrt{1-2h}}{h(1-\tau)} \xi$  so ist  $z^* = x^*$ .

(B3) Die in Abschnitt 3 betrachteten Verfahren SA, NV1, NV und TV sind wohlgeklärt und die jeweils definierten Folgen  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren gegen  $x^*$ .

(B4) Für  $n \in \mathbb{N}$  gelten die Abschätzungen:

$$\text{apriori:} \quad \|Lx^* - Lx_n\| \leq A_n \frac{\xi}{1-\tau}$$

$$\text{aposteriori:} \quad \|Lx^* - Lx_n\| \leq a_n \zeta_{n-1}, \quad \zeta_{n-1} := \|Lc_{n-1}\|,$$

wobei  $c_{n-1}$  die in Lemma 7 jeweils erklärte Korrektur ist und  $A_n$  bzw.  $a_n$  für die verschiedenen Verfahren aus der folgenden Tabelle hervorgehen:

|                                                                                                                                | $A_n$                                                                                                                                               | $a_n$                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| SA                                                                                                                             | $(1 - (1 - \tau)\sqrt{1 - 2h})^{n-1} (\Theta + \tau)$                                                                                               | $\frac{1 - (1 - \delta_{n-1})h_{n-1} - \sqrt{1 - 2h_{n-1}}}{(1 - \delta_{n-1})h_{n-1}}$ $h_{n-1} := \frac{\zeta_{n-1}^K}{(1 - \delta_{n-1})^2}$ $\delta_{n-1} := 2 \lambda \beta_{n-1} \leq \delta_{n-2} + K\zeta_{n-2}$ $\delta_o := \tau; \beta_{n-1} \text{ zu } x_{n-1} \text{ gemäß IV.a}$ |
| NV1                                                                                                                            | $(1 - \sqrt{1 - 2h})^{n-1} \Theta$                                                                                                                  | $a_n, h_{n-1}$ formal wie bei SA, aber:<br>$\delta_{n-1} := \delta_{n-2} + \frac{K}{1 - \tau} \zeta_{n-2}, \delta_o := 0$                                                                                                                                                                       |
| NV                                                                                                                             | $\frac{2\sqrt{1 - 2h}}{h} \frac{\Theta 2^n}{1 - \Theta 2^n}$                                                                                        | $\frac{1 - h_{n-1} - \sqrt{1 - 2h_{n-1}}}{h_{n-1}}$ $h_{n-1} := \zeta_{n-1} \kappa_{n-1}^K$ $\kappa_{n-1} := \frac{\kappa_{n-2}}{1 - h_{n-2}}$                                                                                                                                                  |
| TV                                                                                                                             | $2\left(\frac{3}{8}\right)^n h^{\frac{3}{2}n-1}$<br>für $n = 1$ :<br>$\frac{1 + \frac{1}{4}h}{1 - h(1 + \frac{1}{2}h)} h^2$<br>(oder $A_2$ von NV1) | $\frac{1 + \frac{1}{4}h_{n-1}}{1 - h_{n-1}(1 + \frac{1}{2}h_{n-1})} h_{n-1}^2$ $h_{n-1}$ formal wie bei NV, aber:<br>$\kappa_{n-1} := \frac{\kappa_{n-2}}{1 - h_{n-2}(1 + \frac{1}{2}h_{n-2})}$                                                                                                 |
| Überall: $\Theta := \frac{1 - h - \sqrt{1 - 2h}}{h}$ , $h_o := h$ , $K := 2 \lambda \gamma$ , $\kappa_o := \frac{1}{1 - \tau}$ |                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

#### Zusatz:

Ist  $Y$  reeller Hilbertraum,  $\lambda \geq 0$  und neben (V1):

$$(V1)^* \quad \exists \beta^* \in \mathbb{R}; \forall u \in U: -(Lu, B(x_M, u)) \leq \beta^* \|Lu\|^2,$$

so gelten die Aussagen von Satz 4 bezüglich NV und TV auch mit  $\beta^*$  anstelle von  $\beta$ .

Beweis:

Nach (3.16) setzen wir bezüglich SA in Satz 2  $\Gamma := A^{-1}$  und  $v_0 := 0$ .  
Hinsichtlich der Voraussetzungen (V1) bis (V5) aus Satz 2 folgt dann

$$(V1) \quad \| \Gamma F(0) \|_L = \| F(0) \| = \| \lambda B(x_M, x_M) + s \| = \xi =: \zeta.$$

$$(V2) \quad \| I - \Gamma F'[0] \| = \| I - A^{-1}(A + 2\lambda B(x_M, \cdot)) \| = \| 2\lambda A^{-1} B(x_M, \cdot) \| \\ = 2|\lambda| \| B(x_M, \cdot) \| = 2|\lambda|\beta =: \delta; \quad \delta < 1 \text{ nach (V2).} \\ (V1)$$

$$(V3) \quad \| A^{-1}(F'[u] - F'[v]) \| = \| F'[u] - F'[v] \| \leq \sup_{w \in U} \| F''[w] \| \| u - v \| \\ \leq 2|\lambda|\gamma \| u - v \| \Rightarrow k := 2|\lambda|\gamma.$$

$$(V4) \quad \frac{k\xi}{(1-\delta)^2} = \frac{2|\lambda|\gamma\xi}{(1-\tau)^2} = h \leq \frac{1}{2} \text{ nach (V3)}$$

(V5) nicht relevant, da  $S_0(r) = D = U$  gesetzt werden kann.

(Zum Nachweis von (V1) bis (V3) vergl. auch die anschließende Bemerkung 2.)

Aus Satz 2 folgen somit (B1) und (B2) sowie die Aussagen aus (B3) und (B4) bezüglich SA. Zur angegebenen apriori-Schranke beachte man, daß

$$\theta = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{1+\sqrt{1-2h}} = \frac{1-h-\sqrt{1-2h}}{h} \quad \text{und} \quad (1-(1-\tau)h-\sqrt{1-2h})\frac{1}{2} = \theta + \tau.$$

Die besondere Form von  $\delta_{n-1}$  aus der aposteriori-Schranke folgt ähnlich wie beim Nachweis von (V2). Zu beachten ist, daß sich die Aussagen bezüglich der Folgenglieder  $u_n$  auf die Folgenglieder  $x_n = x_M + u_n$  entsprechend übertragen und die Norm in  $U$  durch die Norm in  $Y$  ausgedrückt wurde, so daß z.B.  $\| u^* - u_n \|_L = \| Lu^* - Lu_n \| = \| Lx^* - Lx_n \|$ .

Nach Bemerkung 2 im Anschluß an Satz 2 sind zugleich die Voraussetzungen für NV1 erfüllt, wobei nach (4.17)

$$(4.20) \quad \| f_0^{-1} \| \leq \frac{1}{1-\tau} \quad (\Gamma_0 = (F'[0])^{-1} = f_0^{-1})$$

Satz 2 gilt nun mit  $v_0 := 0$ ,  $\Gamma := \Gamma_0$  und

$\zeta := \frac{\xi}{1-\tau}$ ,  $\delta := 0$ ,  $k := \frac{2|\lambda|\gamma}{1-\tau}$  und dem gleichen Wert für  $h$  wie oben (vgl. auch die anschließende Bemerkung 2).

Ebenso sieht man unmittelbar, daß die Voraussetzungen aus Satz 3 für das NV für  $v_0 := 0$  erfüllt sind, und zwar mit

$\zeta := \frac{\xi}{1-\tau}$ ,  $\kappa := \frac{1}{1-\tau}$ ,  $K := 2|\lambda|\gamma$  und dem gleichen Wert für  $h$  wie oben.

Damit sind auch (B3) bzw. (B4) bezüglich NV1 und NV klar. Hinsichtlich des TV beziehen wir uns auf eine Arbeit von DÖRING [21]. Da im vorliegenden Fall die dritte Ableitung verschwindet, ist hier der "Grenzfall"  $\sigma_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\sigma_3 = 0$  möglich (vergleiche [21], Satz 2). Die Konvergenz des TV läßt sich dann analog wie beim "Standardsatz" (vgl. [21], Satz 1) führen. Mit den Bezeichnungen aus [21] (beachte speziell die andere Bedeutung von  $d_n$  und  $\beta$ ) setzen wir  $M_2 := \frac{1}{2} K = |\lambda| \gamma$ ,  $M_3 := 0$ ,  $\zeta := \frac{\xi}{1-\tau}$ ,  $\beta := \frac{1}{1-\tau}$ ,  $h_{n-1} := \zeta_{n-1} \beta_{n-1} K$ . Es gelten dann:

$$(4.21) \quad \|x_n - x_{n-1}\| = \|d_{n-1}\| \leq (1 + \frac{1}{2} h_{n-1}) \zeta_{n-1} \leq \frac{5}{4} \zeta_{n-1} \quad [(2.6)]$$

$$(4.22) \quad \beta_n \leq \frac{1}{1 - h_{n-1} (1 + \frac{1}{2} h_{n-1})} \beta_{n-1} \leq \frac{8}{3} \beta_{n-1} \quad [(2.9)-(2.10)]$$

$$(4.23) \quad \|F_n\| \leq \frac{1}{2} h_{n-1} (1 + \frac{1}{4} h_{n-1}) K \zeta_{n-1}^2 \quad [(2.14)]$$

$$(4.24) \quad \zeta_n \leq \frac{1}{2} \frac{h_{n-1}^2 (1 + \frac{1}{4} h_{n-1})}{1 - h_{n-1} (1 + \frac{1}{2} h_{n-1})} \zeta_{n-1} \leq \frac{3}{8} \zeta_{n-1} \quad [(2.11)]$$

$$(4.25) \quad h_n = \frac{1}{2} \frac{h_{n-1}^3 (1 + \frac{1}{4} h_{n-1})}{[1 - h_{n-1} (1 + \frac{1}{2} h_{n-1})]^2} \quad (\leq \frac{1}{2}, \text{ vorausgesetzt } h_{n-1} \leq \frac{1}{2})$$

$$(4.26) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{5}{4} \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{3}{8})^i \zeta_n = 2 \zeta_n \quad [(2.17)]$$

$$(4.27) \quad \zeta_n \leq (\frac{3}{8})^n h^{\frac{3}{2}n-1} \zeta \quad [(s)_n]$$

Die Numerierung in [...] bezieht sich auf die entsprechenden Angaben in [21]. Die apriori-Abschätzung ergibt sich aus (4.26) und (4.27), die aposteriori-Schranke aus (4.26), (4.24) und (4.22).

Der Zusatz ist unmittelbar klar nach Satz 1.b. ▲

#### Bemerkungen

1. Die angegebenen Voraussetzungen entsprechen gerade auch den Bedingungen, die bei Mc FARLAND [36] für die Konvergenz des Verfahrens BIL2 angegeben werden.
2. Wegen der Wahl der Norm steht für SA bei Aufspalten der Norm zur Bestimmung von  $\zeta$ ,  $\delta$  und  $k$  das Gleichheitszeichen (vergl. Bemerkung im Anschluß an Satz 1). Dies gilt allerdings nicht mehr für NV1, NV

und TV, wo  $\|\Gamma_0 F(0)\|$  durch  $\|\Gamma_0\| \|F(0)\|$  und  $\|\Gamma_0 F[u] - \Gamma_0 F[v]\|$  durch  $\|\Gamma_0\| \|F[u] - F[v]\|$  abgeschätzt wird.

3. Wegen (3.19) gilt für die 1. TV-Näherung auch die Fehlerabschätzung für die 2. NV1-Näherung und umgekehrt. Für kleinere Werte von  $h$  (genauer bis  $h \div 0.221$ ) ergibt letztere eine schärfere Abschätzung; für größere Werte von  $h$  ist die Abschätzung aus dem TV vorzuziehen. (Für  $h = \frac{1}{2}$  erhält man  $A_1(TV) = 0.75$ , während  $A_2(NV1) = 1.$ )

Die durch Voraussetzung I bis IV gesicherten Beschränktheitsaussagen garantieren zumindest in einem gewissen Bereich eine stetige Abhängigkeit der Lösung vom Parameter  $\lambda$ . Bei Anwendung von Iterationsverfahren ist es deshalb naheliegend, die Lösung des Problems zu einem Parameter  $\mu$  als Ausgangsnäherung für einen benachbarten Parameterwert  $\lambda$  zu wählen; dieses Vorgehen entspricht gerade den "Stetigkeitsmethoden" bzw. den "Einbettungsverfahren", wie sie z.B. in [7], [22] und [39] beschrieben werden. Hierbei ist es zweitrangig, ob die Lösung für  $\mu$  exakt oder auch nur näherungsweise vorliegt. Letzteres ist z.B. der Fall, wenn auch diese bereits iterativ bestimmt wurde. Hierfür ist es wünschenswert, mit Vorliegen der Näherungslösung zu  $\mu$  im voraus zu wissen, für welche  $\lambda$  mit dieser Näherung als Ausgangslösung die Voraussetzungen des betrachteten Iterationsverfahrens etwa im Sinne von Satz 4 erfüllt sind. Dazu gilt

#### Satz 5

Es seien  $x_M \in M$  und  $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \varepsilon$  nichtnegative reelle Zahlen, so daß:

$$(V1) \quad \|B(x_M, x_M)\| \leq \alpha$$

$$(V2) \quad \forall u \in U: \|B(x_M, u)\| \leq \beta \|Lu\|$$

$$(V3) \quad \forall u, v \in U: \|B(u, v)\| \leq \gamma \|Lu\| \|Lv\|$$

$$(V4) \quad 2\mu\beta < 1$$

$$(V5) \quad \|Lx_M + \mu B(x_M, x_M) - r\| \leq \varepsilon < \frac{(1-2\beta\mu)^2}{4\mu\gamma} \quad (\text{für } \mu = 0: \varepsilon \in [0, \infty)) .$$

Dann wird durch

$$(4.28) \quad \bar{\lambda} := \frac{1}{2(b + \sqrt{a+b^2})} \quad \text{mit} \quad a := \alpha\gamma - \beta^2, \quad b := \beta - \alpha\mu\gamma + \varepsilon\gamma$$

ein Parameter  $\bar{\lambda} > \mu$  erklärt, derart, daß für alle  $\lambda \in [\mu, \bar{\lambda}]$  die Voraussetzungen von Satz 4 mit  $\lambda, x_M, \beta$  und  $\xi := \varepsilon + (\lambda - \mu)\alpha$  erfüllt sind.

### Zusatz

Es seien die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt, wobei der Zielraum  $Y$  von  $B$  bzw.  $L$  jetzt ein Hilbertraum sei. Ferner gelte  $(V1)^*$  aus dem Zusatz zu Satz 4. Ersetzen wir dann überall  $\beta$  durch die entsprechende Konstante  $\beta^* \in \mathbb{R}$ , so gilt die Aussage von Satz 5 entsprechend, falls  $\beta^* > 0$  oder  $\beta^{*2} < \alpha\gamma$ .

Gilt im anderen Fall (d.h. für  $\beta^* < 0$  und  $\beta^{*2} > \alpha\gamma$ ) anstelle von  $(V5)$

$$(V5)^* \quad \|Lx_M + \mu B(x_M, x_M) - r\| \leq \varepsilon \leq \alpha\mu - \frac{\beta^*}{\gamma},$$

so kann  $\bar{\lambda}$  beliebig groß gewählt werden.

### Beweis

Es sei  $\lambda$  irgendein Parameterwert aus dem nach  $(V4)$  nichtleeren, offenen Intervall  $(\mu, \frac{1}{2\beta})$ . Aus  $(V1)$  und  $(V5)$  folgen dann

$$\|Lx_M + \lambda B(x_M, x_M) - r\| \leq \|Lx_M + \mu B(x_M, x_M) - r\| + (\lambda - \mu) \|B(x_M, x_M)\| \leq \varepsilon + (\lambda - \mu)\alpha.$$

Damit sind aber für  $x_M$ ,  $\beta$  und  $\lambda$  die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt mit  $\tau := 2\lambda\beta$  und  $\xi := \varepsilon + (\lambda - \mu)\alpha$ , vorausgesetzt

$$(4.29) \quad \tau < 1 \quad \text{und} \quad h := \frac{2\lambda\gamma\xi}{(1-\tau)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Die Bedingung für  $h$  ist äquivalent dazu, daß das Polynom

$$(4.30) \quad p(t) := at^2 + bt - \frac{1}{4} \quad \text{mit } a, b \text{ aus (4.28)}$$

für  $t := \lambda$  nicht positiv ist.

Für den in (4.28) definierten Wert  $\bar{\lambda}$  sind hiernach die folgenden beiden Bedingungen nachzuweisen:

$$(4.31) \quad \bar{\lambda} \in (\mu, \frac{1}{2\beta})$$

$$(4.32) \quad \forall \lambda \in [\mu, \bar{\lambda}]: \quad p(\lambda) \leq 0$$

Zunächst sind  $p(0)$  und  $p(\mu)$  negativ, denn  $p(0) = -\frac{1}{4}$  und

$$p(\mu) = -(\frac{1}{2} - \beta\mu)^2 + \varepsilon\mu\gamma < 0 \quad \text{nach (V5)}.$$

Ferner ist  $a + b^2 > 0$ ; genauer gilt:

$$\begin{aligned} a + b^2 &= \alpha\gamma(1 - 2\beta\mu) + \alpha^2\mu^2\gamma^2 + \varepsilon^2\gamma^2 + 2\beta\varepsilon\gamma - 2\alpha\mu\varepsilon\gamma^2 \\ &> 0 \quad \text{nach (V4)} \qquad \qquad \qquad \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$a + b^2 > (\alpha\mu\gamma - \varepsilon\gamma)^2 \quad \text{und}$$

$$b + \sqrt{a+b^2} > b + |\alpha\mu\gamma - \varepsilon\gamma| \geq \beta.$$

Aus der letzten Ungleichung erhalten wir mit Hinblick auf (4.31)

$$(4.33) \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{2(b+\sqrt{a+b^2})} < \frac{1}{2\beta}.$$

Wegen  $a + b^2 > 0$  hat  $p$  für  $a \neq 0$  zwei reelle Nullstellen, nämlich

$$(4.34) \quad t_1 := \frac{1}{2(b+\sqrt{a+b^2})} = \bar{\lambda} \quad \text{und} \quad t_2 := \frac{1}{2(b-\sqrt{a+b^2})}.$$

Im Fall  $a > 0$  (siehe Figur 1, S. 37) ist  $t_2 < 0 < t_1$  und  $p(t) \leq 0 \Leftrightarrow t \in [t_2, t_1]$ . Wegen  $p(\mu) < 0$  ist deshalb  $\mu < t_1 = \bar{\lambda}$  und (4.32) erfüllt.

Im Fall  $a < 0$  (siehe Figur 2) ist  $b > 0$ , indem wegen  $\alpha\gamma < \beta^2$

$$b = \beta - \alpha\gamma\mu + \varepsilon\gamma > \beta - \beta^2\mu + \varepsilon\gamma = \beta(1-\beta\mu) + \varepsilon\gamma.$$

Demnach ist hierfür  $0 < t_1 < t_2$  und  $p(t) \leq 0 \Leftrightarrow t \in \mathbb{R} \setminus (t_1, t_2)$ .

Ferner gilt

$$a + b^2 > (\alpha\mu\gamma - \varepsilon\gamma)^2 \text{ (s.o.)} \Rightarrow -\alpha\mu\gamma + \varepsilon\gamma < \sqrt{a+b^2}$$

$$\Rightarrow b - \sqrt{a+b^2} < \beta \Rightarrow t_2 > \frac{1}{2\beta}.$$

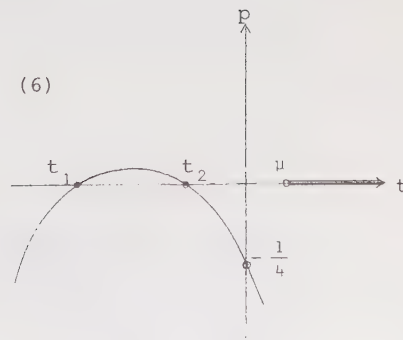
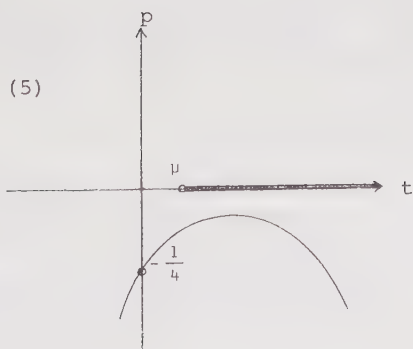
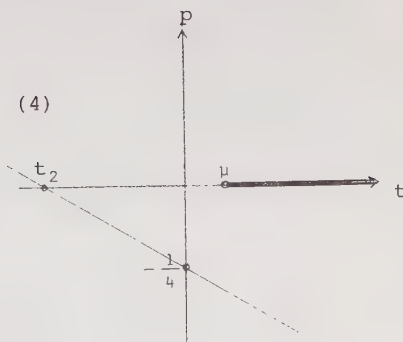
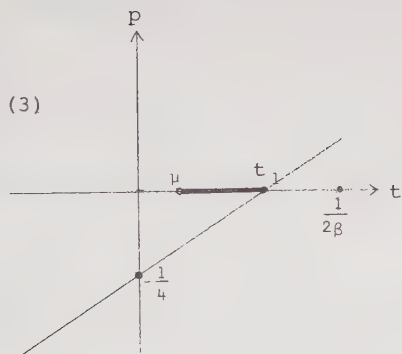
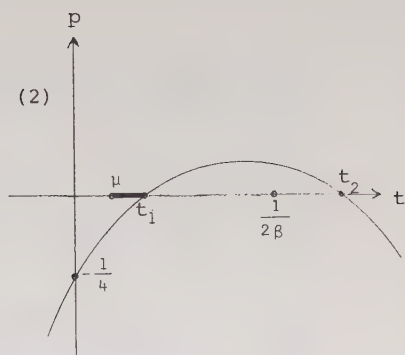
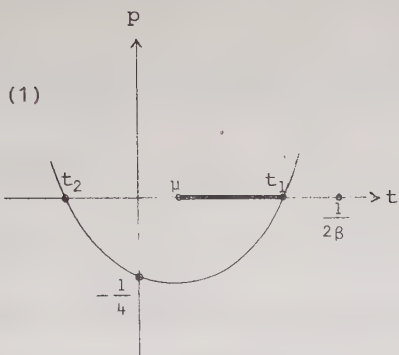
Wegen (V4) muß deshalb  $\mu < t_2$  sein. Wegen  $p(\mu) < 0$  liegt damit aber  $\mu$  im Intervall  $[0, t_1]$ . Mit  $\bar{\lambda} = t_1$  sind also (4.31) und (4.32) wieder erfüllt.

Im Fall  $a = 0$  (siehe Figur 3) ist  $p$  eine Gerade mit der Nullstelle  $t_1 = \frac{1}{4b}$  und der positiven Steigung  $b = \beta(1-\beta\mu) + \varepsilon\gamma$ . Wegen  $p(\mu) < 0$  ist wieder  $\mu < t_1 = \bar{\lambda}$  und (4.32) erfüllt.

Für den Zusatz bleibt lediglich der Fall  $\beta^* \leq 0$  zu untersuchen. Die Bedingung  $2\lambda\beta^* < 1$  wird hierfür gegenstandslos. Es sind also lediglich  $\mu < \bar{\lambda}$  und (4.32) nachzuweisen.

Nach wie vor ist  $p(\mu)$  negativ. Im Fall  $\beta^{*2} \geq \alpha\gamma$  ( $\beta^* < 0$ ) folgt dies aus (V5)\*, indem

$$\beta^{*2} \geq \alpha\gamma \Rightarrow \alpha\mu - \frac{\beta^*}{\gamma} < \frac{(1-2\beta^*\mu)^2}{4\mu\gamma} \Rightarrow (V5)^*.$$



Im Fall  $\beta_0^* < \alpha_0 \gamma$ , also im Fall  $a > 0$ , hat  $p$  wieder die obigen reellen Nullstellen  $t_1, t_2$  und das oben für  $a > 0$  Gesagte behält seine Gültigkeit.

Im anderen Fall, wo  $a \leq 0$  und damit  $\beta^* < 0$  sind, ist wegen (V5)\* auch  $b \leq 0$ .

Für  $a = 0$  (siehe Figur 4) ist dabei  $p$  eine Gerade mit der Steigung  $b \leq 0$ . Wegen  $p(0) = -\frac{1}{4}$  ist dann  $p(t) < 0$  für alle  $t \geq 0$ .

Für  $a + b^2 < 0$  ( $a < 0, b \leq 0$ ) (siehe Figur 5) hat  $p$  keine Nullstelle und es ist  $p(t) < 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Für  $a + b^2 > 0$  ( $a < 0, b < 0$ ) (siehe Figur 6) hat  $p$  wieder die obigen Nullstellen  $t_1, t_2$ , die aber wegen  $b < 0$  beide negativ sind. Speziell ist dann  $p(t) < 0$  für alle  $t \geq 0$ .

Damit gilt (4.32) im Fall  $a \leq 0$  ( $\beta^* < 0$ ; (V5)\* für beliebiges  $\bar{\lambda} > \mu \geq 0$ ). ▲

### Bemerkungen

1. Die Verhältnisse werden um so günstiger, je kleiner  $\varepsilon$  ist. Nach Möglichkeit sollte also  $x_M$  der exakten Lösung des Problems zum Parameterwert  $\mu$  möglichst nahekommen.
2. Mit der Verschärfung (V5)\* wird vermieden, daß im Fall  $\beta^* < 0$  und  $a = 0$  die Gerade steigt. Darüber hinaus wird damit ausgeschlossen, daß  $p$  für  $\beta^* < 0$  und  $a < 0$  positive Nullstellen besitzt (wie in Figur 2); wäre nur (V5) erfüllt, so müßte dann unterschieden werden, ob  $\mu < t_1$  oder  $\mu > t_2$  ist (auch Grenzfall  $t_1 = t_2$  möglich).
3. Naturgemäß gelten die Aussagen von Satz 4 mit den obigen Voraussetzungen nicht nur für  $\lambda \in [\mu, \bar{\lambda}]$ , sondern für alle komplexen Parameter in einer gewissen Umgebung von  $\mu$ , nämlich für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit

$$(4.35) \quad 2\beta|\lambda| < 1 \quad \text{und} \quad \frac{2\gamma|\lambda|(\varepsilon + \alpha|\lambda - \mu|)}{(1 - 2\beta|\lambda|)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Insbesondere gilt im Falle von  $\mu = 0$  die Aussage von Satz 4 für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| \leq \bar{\lambda}$ , denn für diesen Fall können wir in dem obigen Beweis ohne Einschränkung  $\lambda$  durch  $|\lambda|$  ersetzen.

Allerdings interessiert uns hauptsächlich der Fall reeller Parameter, und zwar ausgehend von  $\mu = 0$ , indem wir von der Invertierbarkeit des Linearteils ausgehen. Negative Parameter können dabei durch Übergang von  $B$  zu  $-B$  erfaßt werden.

Für  $\varepsilon = \mu = 0$  ist  $b = \beta$  und  $a + b^2 = \alpha\gamma$ . Hiermit gilt

### Folgerung

Es sei  $x_M$  Lösung des Problems zum Parameter Null, d.h. Lösung von

$$(4.36) \quad Lx = r, \quad x \in M$$

Dann hat das nichtlineare Problem für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit

$$(4.37) \quad |\lambda| \leq \frac{1}{2(\beta + \sqrt{\alpha\gamma})} =: \lambda^+ \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ wie in Satz 5})$$

jeweils eine Lösung, die man mit Hilfe der Verfahren aus Lemma 7 (näherungsweise) erhalten kann. Hierzu gelten die Aussagen von Satz 4 mit  $\xi := \alpha|\lambda|$ .

Starten wir nun mit  $x_0 := x_M$  eines der betrachteten Iterationsverfahren SA, NV1 oder NV zur Lösung des Problems zum Parameter  $\lambda := \lambda^+$ , so ist jeweils im  $n$ -ten Iterationsschritt (Bezeichnungen wie in Lemma 7):

$$(4.38) \quad \varepsilon_n := \|F_n\| = \|Lx_n + \lambda B(x_n, x_n) - r\|$$

$$(4.39) \quad \alpha_n := \|B(x_n, x_n)\| \leq \alpha_{n-1} + 2\beta_{n-1}\zeta_{n-1} + \gamma\zeta_{n-1}^2$$

$$(4.40) \quad \beta_n := \|B(x_n, \cdot)\| \leq \beta_{n-1} + \zeta_{n-1}\gamma < \frac{1}{2\lambda},$$

wobei  $\zeta_{n-1} = \|Lc_{n-1}\|$ . Entsprechendes gilt für TV mit  $\|L(c_{n-1} + d_{n-1})\|$  anstelle von  $\zeta_{n-1}$ . (4.39) erhalten wir dabei unter Beachtung von  $x_n = x_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1}$  durch Anwendung der Dreieckungleichung und Ausnutzung von Voraussetzung IV. Dies gilt ebenso für die erste Abschätzung in (4.40). Die zweite Abschätzung ergibt sich aus dem Konvergenzbeweis für die Iterationsverfahren.

Ist dann für ein gewisses  $n$  die Bedingung

$$(4.41) \quad \varepsilon_n < \frac{(1 - 2\lambda\beta_n)^2}{4\gamma\lambda}$$

erfüllt, so können wir Satz 4 erneut anwenden mit  $x_M := x_n$ ,  $\varepsilon := \varepsilon_n$ ,  $\beta := \beta_n$ ,  $\alpha := \alpha_n$ . Man beachte, daß die gemäß (V2) zu stellende Bedingung mit (4.40) gegeben ist.

Dafür, daß auch (4.41) für ein gewisses  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt wird, spricht der Umstand, daß  $\varepsilon_n$  mit  $\zeta_n$  gegen Null strebt, während  $2\lambda\beta_n$  aufgrund

der einschränkenden Bedingung für die Konstante  $h$  in der Regel unterhalb einer Konstanten kleiner Eins bleibt. Beim NV ist z.B. nach Lemma 7.c und IV.c

$$(4.42) \quad \varepsilon_n = \lambda \|B(c_{n-1}, c_{n-1})\| \leq \lambda \gamma \zeta_{n-1}^2,$$

während unter der schärferen Bedingung  $h < \frac{1}{2}$  gezeigt werden kann, daß  $2\lambda\beta_n \leq \text{const.} < 1$  mit  $\beta_n := \beta_{n-1} + \zeta_{n-1}\gamma$ , was wiederum die gleichmäßige Beschränktheit von  $\{f_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  und letztlich die quadratische Konvergenz des NV zur Folge hat (vergl. DOERING [20]).

Um unseren Konvergenzbereich hinsichtlich des Parameters zu erweitern, können wir diesen Vorgang beliebig wiederholen. Führen wir hierzu einen "äußeren" Iterationsindex  $N$  ein, so erhalten wir bei entsprechender Bezeichnungsweise das folgende Verfahren:

#### Einbettungsverfahren

Es seien  $\lambda_0 := 0$ ,  $\varepsilon_1 := 0$ ,  $x_{0,1}$  Lösung des linearen Problems (4.36) mit den gemäß IV.a bzw. IV.b zugehörigen Konstanten  $\alpha := \alpha_1$ ,  $\beta := \beta_1$  und für  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} a_N &:= \alpha_N \gamma - \beta_N^2 \\ b_N &:= \beta_N - \alpha_N \lambda_{N-1} \gamma + \varepsilon_N \gamma \\ \lambda_N &:= \frac{1}{2(b_N + \sqrt{a_N + b_N^2})} \end{aligned}$$

Ferner sei  $x_{n,N}$   $n$ -te Näherung (SA, NV1, NV oder TV) der Lösung  $x_N^*$  zum Parameterwert  $\lambda_N$  mit  $\alpha_{n,N}$ ,  $\beta_{n,N}$  und  $\varepsilon_{n,N}$  entsprechend zu  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$  aus Satz 5, wenn dort  $x_M := x_{n,N}$  und  $\mu := \lambda_N$  gesetzt wird.

Gilt nun

$$(4.43) \quad \varepsilon_{n,N} < \frac{(1 - 2\lambda_N \beta_{n,N})^2}{4\gamma \lambda_N}$$

so setzen wir

$$\begin{aligned} x_{0,N+1} &:= x_{n,N} \\ \alpha_{N+1} &:= \alpha_{n,N} \\ \beta_{N+1} &:= \beta_{n,N} \\ \varepsilon_{N+1} &:= \varepsilon_{n,N} \end{aligned}$$

Ist jeweils Bedingung (4.43) für ein  $n \in \mathbb{N}$  gegeben, so wird hierdurch rekursiv eine Folge monoton wachsender Parameter  $\lambda_N$  erzeugt, derart, daß jeweils für alle  $\lambda \in [\lambda_{N-1}, \lambda_N]$  die Voraussetzungen von Satz 4 mit  $x_M := x_{o,N}$ ,  $\alpha := \alpha_N$ ,  $\beta := \beta_N$  und  $\varepsilon := \varepsilon_N$  erfüllt sind.

### Bemerkungen

1. Es ist sinnvoll, in der "inneren Iteration"  $\beta_{n,N}$  zwecks Prüfung von (4.43) über (4.40) abzuschätzen, zumal aus dieser Abschätzung auch die Fehlerabschätzungen resultieren und die erforderlichen Größen nach jedem Iterationsschritt zur Verfügung stehen;  $\varepsilon_{n,N}$  gewinnt man dabei aus den in Lemma 7 gegebenen Beziehungen für den F-Wert. Für die "äußere Iteration" sollte man möglichst  $\beta_{N+1}$  neu, d.h. mit Hilfe von  $x_{o,N+1}$  bestimmen, um einen möglichst hohen Wert für  $\lambda_{N+1}$  zu erzielen.
2. Bei SA gilt mit der Iterierten  $u_{n,N} := x_{n,N} - x_{o,N}$  ( $n, N \in \mathbb{N}$ ) nach dem Beweis zu Lemma 7.a:

$$(4.44) \quad Au_{1,N+1} = -\lambda_{N+1} B(x_{o,N+1}, x_{o,N+1}) - (Lx_{o,N+1} - r)$$

$$Au_{n+1,N} = -\lambda_N B(x_{n,N}, x_{n,N}) - (Lx_{o,N} - r)$$

Wird im N-ten Einbettungsschritt nach n SA-Schritten abgebrochen, um mit  $x_{N+1,o} := x_{N,n}$  den N+1-ten Einbettungsschritt zu starten, so folgt:

$$\begin{aligned} Au_{1,N+1} &= \frac{\lambda_{N+1}}{\lambda_N} [-\lambda_N B(x_{n,N}, x_{n,N}) - (Lx_{o,N} - r)] \\ &\quad + \frac{\lambda_{N+1}}{\lambda_N} (Lx_{o,N} - r) - (Lx_{n,N} - r) \\ &= \frac{\lambda_{N+1}}{\lambda_N} Au_{n+1,N} + \frac{\lambda_{N+1}}{\lambda_N} A(x_{o,N} - x_{o,1}) - A(x_{n,N} - x_{o,1}) . \end{aligned}$$

Durch Anwendung von  $A^{-1}$  (Existenz vorausgesetzt) erhalten wir

$$\begin{aligned} x_{1,N+1} &= x_{o,N+1} + u_{1,N+1} = x_{n,N} + u_{1,N+1} \\ &= x_{n,N} + \frac{\lambda_{N+1}}{\lambda_N} (u_{n+1,N} + x_{o,N} - x_{o,1}) - (x_{n,N} - x_{o,1}) , \end{aligned}$$

womit

$$(4.45) \quad x_{1,N+1} = x_{o,1} + \frac{\lambda_{N+1}}{\lambda_N} (x_{n+1,N} - x_{o,1}) .$$

Mit Berechnung einer weiteren SA-Näherung im N-ten Schritt läge also auch bereits die erste SA-Näherung im nächsten Einbettungsschritt vor.

3. Für NV und TV gilt das Verfahren analog mit  $\beta_N^*$  gemäß dem Zusatz zu Satz 4 bzw. Satz 5. Ist dabei für ein  $N$   $\beta_N^* < 0$  wählbar und  $\beta_N^{*2} > \alpha\gamma$ , so brauchen nach Beachtung der Verschärfung (V5)\* keine weiteren Einbettungsschritte mehr vorgenommen zu werden. Da dann nach dem Zusatz  $\lambda_{N+1}$  beliebig groß gewählt werden kann, kann nun das Problem für jeden gewünschten (positiven) Wert des Parameters  $\lambda$  mit dem Einbettungsverfahren gelöst werden.

Bei diesen Betrachtungen sind wir davon ausgegangen, daß wir das Problem für einen gewissen Parameter  $\lambda_P$  lösen wollen, aber keine Näherungslösung zur Verfügung steht, um etwa Satz 4 anzuwenden. Mit dem Einbettungsverfahren soll dann ausgehend von  $\lambda = 0$  der Wert  $\lambda_P$  erreicht und so eine geeignete Näherung bereitgestellt werden. Auch wenn die Folge der  $\lambda_N$  monoton wächst, bleibt allerdings unklar, ob auf diese Weise  $\lambda_P$  erreicht werden kann oder aber die Folge gegen einen Grenzwert  $\lambda_\infty < \lambda_P$  konvergiert. Sicher wird  $\lambda_P$  natürlich dann nicht erreicht, wenn hierzu überhaupt keine Lösung existiert oder wenn zwischen Null und  $\lambda_P$  eine Lösungsverzweigung auftritt, da Satz 4 lokale Eindeutigkeit sichert. Neben diesen problembedingten Einschränkungen treten allerdings auch verfahrenstechnische Begrenzungen auf. Dies gilt insbesondere dann, wenn die Norm der Inversen nach dem Banachlemma abgeschätzt wird und nicht die Aussagen aus dem Zusatz zu Satz 5 verwandt werden können. Wegen (V4) wird die Folge der  $\lambda_N$  durch  $\frac{1}{2\beta_N}$  majorisiert; für  $\lambda_N \rightarrow \infty$  ist also  $\beta_N \rightarrow 0$  notwendig. Zu beachten ist, daß  $\beta_N$  über  $x_N$  implizit wieder von  $\lambda_N$  abhängt. Entscheidend für das Wachstum von  $\lambda_N$  ist letztlich diese Abhängigkeit.

Zum Abschluß des Kapitels betrachten wir die Abhängigkeit der Aussagen aus Satz 4 von  $|\lambda| \in [0, \lambda^+]$  mit  $\lambda^+$  und  $x_M$  aus Folgerung 1. Über die Parametrisierung  $|\lambda| = t\lambda^+$ ,  $t \in [0, 1]$ , können wir die diesbezüglich relevanten Größen auf  $\lambda^+$  relativieren. Mit den zugehörigen Konstanten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  erhalten wir wegen (4.37) und  $\xi = \alpha|\lambda|$ :

$$(4.46) \quad h = \frac{1}{2} p^2; \quad \tau = \frac{q}{1+q} t; \quad \frac{\xi}{1-\tau} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} p$$

$$\text{mit } q := \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}} \quad \text{und} \quad p := \frac{t}{1+q(1-t)}$$

Entsprechend der vorausgesetzten Invertierbarkeit von A wird der Eindeutigkeitsbereich  $r_+$  für  $\lambda = 0$  unendlich groß, während  $r_-$  verschwindet. Für  $|\lambda| \rightarrow \lambda^+$  gleichen sich  $r_+$  und  $r_-$  auf den gemeinsamen Wert  $\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$  bei  $\lambda^+$  an (s. Figur 7, S. 44). Wegen des Wurzelausdrucks haben hier die Graphen für  $r_+$  und  $r_-$  eine senkrechte Tangente.

Letzteres gilt auch für die apriori-Fehlerabschätzung (siehe Figur 8), abgesehen von der für TV. Speziell verheißen die Fehlerabschätzungen für  $|\lambda| = \frac{1}{2} \lambda^+$  noch sehr gute erste Näherungen. Danach nimmt die Qualität der Näherungen, der Fehlerabschätzung nach zu urteilen, rapide ab. Inwieweit diese Fehlerschranken in der Nähe von  $\lambda^+$  noch authentisch sind, hängt im Einzelfall wieder davon ab, ob die Abschätzung insbesondere bezüglich  $\beta$  dem Problem gerecht wurde. Einen gewissen Aufschluß hierüber kann der nächste Einbettungsschritt bringen. Unter diesem Vorbehalt zeigt Figur 8 darüber hinaus die unterschiedliche Qualität der einzelnen Näherungen.

Zu beachten ist, daß beim ersten Schritt für SA apriori- und aposteriori-Schranke übereinstimmen, während für NV und TV der Ausdruck  $\frac{\xi}{1-\tau}$  nur eine Abschätzung für  $\zeta_0$  ist. (Bei SA ist der Faktor  $\frac{1}{1-\tau}$  der Konstruktion der Fehlerschranke anzulasten, während  $\xi = \|\Gamma F(0)\|$  ist - vergl.

Bemerkung 2 im Anschluß an Satz 4, S. 33.)

Mit (4.46) ist klar, daß die diskutierten Verhältnisse für jedes Problem der hier betrachteten Art nur von den zugehörigen Konstanten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  (in gewisser Weise auch nur von dem Quotienten  $q$ ) abhängen und qualitativ gleich sind. Für die Figuren 7 und 8 wurde  $q := 1$  gesetzt.

Die entsprechende Fehlerabschätzungskurve für die zweite NV1-Näherung liegt ab  $\lambda = \kappa \lambda^+$  mit  $\kappa \doteq 0.799$  oberhalb der ursprünglichen (in Figur 8 dargestellten Kurve für TV, wo sie sich der für NV angleicht (vergl. Bem. 3, S. 34).

Figuren 7 und 8

(7)

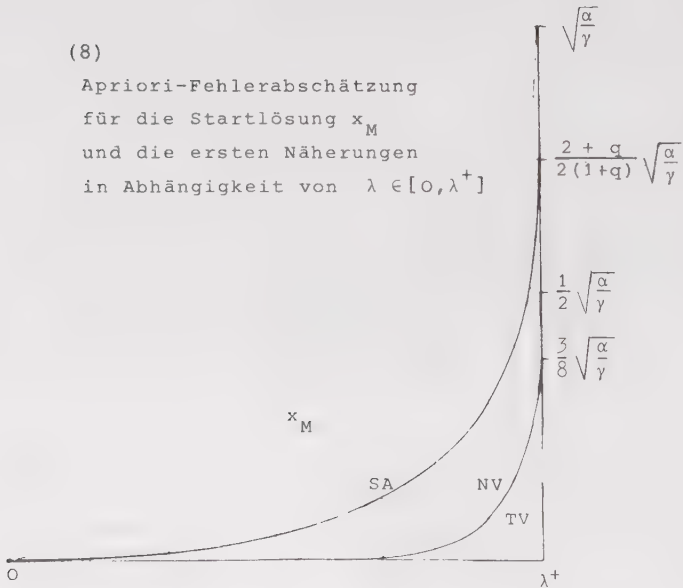
$r_+$

Eindeutigkeitsbereich ( $r_+$ )  
und maßgebende Kugel-  
umgebung von  $x_M$  ( $r_-$ )  
in Abhängigkeit von  
 $\lambda \in [0, \lambda^+]$



(8)

Apriori-Fehlerabschätzung  
für die Startlösung  $x_M$   
und die ersten Näherungen  
in Abhängigkeit von  $\lambda \in [0, \lambda^+]$



## K A P I T E L    I I

### Der Fall quasilinearer, elliptischer Randwertprobleme

Hinsichtlich der Voraussetzungen aus Kapitel I untersuchen wir im folgenden den Fall, wo  $L$  ein linearer Differentialoperator der Ordnung  $2m$  ist und  $B$  aus Produkten von Ableitungen besteht. Die betrachteten Funktionen seien auf einer offenen Teilmenge  $\Omega$  des  $\mathbb{R}^n$  erklärt und entsprechend glatt. Die gestellten Randbedingungen mögen die Ableitungen höchstens bis zur Ordnung  $m-1$  berühren; sie seien linear und von einer genügend glatten Funktion erfüllbar. Es gelingt dann ein allgemeiner Nachweis der Voraussetzungen aus Kapitel I, Abschnitt 1, unter folgenden Bedingungen:

$\Omega$  ist beschränkt und besitzt einen genügend glatten Rand.

Die Koeffizienten von  $L$  sind genügend glatte Funktionen auf  $\Omega$ ;  $L$  ist gleichmäßig streng elliptisch auf  $\Omega$  und in gewissem Sinne gleichmäßig definit auf der Menge der auf  $\Omega$  erklärten Testfunktionen (vergl. (2.18)).

Die Koeffizienten von  $B$  sind im wesentlichen beschränkte Funktionen auf  $\Omega$  und die Ableitungen in  $B$  sind gegenüber denen aus  $L$  nicht zu hochgradig.

Hierzu fassen wir alle Ableitungen im verallgemeinerten Sinne auf und betrachten neben den verschiedenen Klassen stetiger Funktionen die sogenannten Sobolew-Räume. Die nötigen Definitionen und wichtigsten Beziehungen werden am Anfang dieses Kapitels in aufzählender Form zusammengestellt, wobei die grundlegenden Aussagen dem Buch von ADAMS [3] entnommen sind. Zur Existenz- und Regularitätstheorie bei der Lösung elliptischer Randwertprobleme wird hauptsächlich auf die Werke von AGMON [5] und FRIEDMAN [25] zurückgegriffen. Es werden die für unsere Zwecke wichtigen Ergebnisse zusammengestellt. Die Beweise werden soweit skizziert, wie es für den Zusammenhang und zum Rückgreifen auf Zwischenergebnisse sinnvoll erscheint. Zugleich wird dabei deutlich, wie die von uns gestellten Voraussetzungen hinsichtlich ihrer Erfüllbarkeit einzuordnen sind. Einige Aussagen kommen auch erst in den nächsten Kapiteln zum Tragen.

## 1. Grundlegende Definitionen und Beziehungen

Im folgenden sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ ,  $\bar{\Omega}$  der topologische Abschluß von  $\Omega$  und  $\Gamma := \bar{\Omega} \setminus \Omega$  der Rand von  $\Omega$ .

Wir betrachten gewisse Funktionen, welche auf  $\Omega$  erklärt sind und Werte in  $K$  annehmen. Hierzu gilt:

### Definition von Räumen stetiger und differenzierbarer Funktionen

Es seien  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $p \in [1, \infty)$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ ,  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  mit  $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ , wobei  
 $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ,  $\alpha! := \prod \alpha_i!$  und  $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ ,  $D_i^{\alpha_i} := \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$  für  
 $i = 1(1)n$ .

Es sei

- a)  $C^k(\Omega)$  der Raum aller auf  $\Omega$  definierten und  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen; wobei speziell:
  - b)  $C^0(\Omega) = C(\Omega)$  der Raum aller stetigen und
  - c)  $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$  der Raum aller beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$ .
  - d)  $C_0^\infty(\Omega)$  der Raum aller Funktionen aus  $C^\infty(\Omega)$  mit kompaktem Träger in  $\Omega$ .
  - e)  $C_b^k(\Omega)$  : der Raum aller Funktionen  $u$  aus  $C^k(\Omega)$ , für die  $D^\alpha u$ ,  $|\alpha| = O(1)k$ , auf  $\Omega$  beschränkt ist und damit folgende Norm existiert:
- $$(1.1) \quad \|u\|_{k, \infty} := \max \left\{ \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|; |\alpha| = O(1)k \right\}$$
- f)  $C^k(\bar{\Omega})$  der Raum aller Funktionen  $u \in C^k(\Omega)$ , für die  $D^\alpha u$ ,  $|\alpha| = O(1)k$  auf  $\Omega$  beschränkt und gleichmäßig stetig ist.
  - g)  $C^{k,p}(\Omega)$  der Raum aller Funktionen  $u \in C^k(\Omega)$ , für die folgende Norm existiert:

$$(1.2) \quad \|u\|_{k,p} := \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

- h)  $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$  der Raum aller Funktionen  $u \in C^k(\Omega)$ , für die  $D^\alpha u$ ,  $|\alpha| = O(1)k$ , auf  $\Omega$  beschränkt ist und einer Hölder-Bedingung mit dem

Exponenten  $\lambda$  genügt, d.h. es existiert ein  $K > 0$ , so daß unabhängig von  $\alpha$

$$(1.3) \quad \forall x, y \in \Omega: |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq K \|x - y\|^\lambda$$

Hierbei verstehen wir alle Räume als Vektorräume über  $K$ .

### Bemerkungen

1. Es gilt stets:  $C^{k, \lambda}(\bar{\Omega}) \subset C^k(\bar{\Omega}) \subset C_b^k(\Omega) \subset C^k(\Omega)$
2. Die normierten Räume  $(C_b^k(\Omega), \|\cdot\|_{k, \infty})$  und  $(C^k(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{k, \infty})$  sind Banachräume; dagegen ist  $(C^{k, p}(\Omega), \|\cdot\|_{k, p})$  nicht vollständig.
3. Bei entsprechenden Norm-Definitionen in der einschlägigen Literatur wird auf den Faktor  $\frac{|\alpha|!}{\alpha!}$  verzichtet. Hierbei werden natürlich zu (1.1) bzw. (1.2) äquivalente Normen definiert, so daß dieser Unterschied für theoretische Untersuchungen irrelevant ist. Es gilt

$$(1.4) \quad \|u\|_{k, p}^p = \sum_{j=0}^k |u|_{j, p}^p$$

mit der für  $u \in C^{k, p}(\Omega)$  erklärten Seminorm:

$$(1.5) \quad |u|_{k, p} := \left( \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Für diese gilt wiederum mit  $k \in \mathbb{N}$

$$(1.6) \quad |u|_{k, p}^p = \sum_{i=1}^n |D_i u|_{k-1, p}^p = \sum_{\pi} |D_{\pi(1)} \dots D_{\pi(k)} u|^p,$$

wobei über alle Abbildungen  $\pi$  von  $\{1, \dots, k\}$  in  $\{1, \dots, n\}$  zu summieren ist. Letztere Darstellung ist gerade die natürliche Form, die nicht die Vertauschbarkeit der Differentiationen implizit voraussetzt. Wegen (1.6) ist (1.1) bzw. (1.2) für explizite Abschätzungen praktikabler als die übliche Normdefinition.

### Definition von Sobolev-Räumen

Es sei  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $p \in [1, \infty)$  und

- a)  $L^p(\Omega)$  der Raum aller auf  $\Omega$  im Sinne von Lebesgue meßbaren Funktionen  $v$ , für die die Norm  $\|v\|_{0, p}$  existiert.

- b)  $L^\infty(\Omega)$  der Raum aller auf  $\Omega$  definierten, im Sinne von Lebesgue meßbaren Funktionen, die fast überall auf  $\Omega$  beschränkt sind.
- c)  $H^{k,\infty}(\Omega)$  der Raum aller Funktionen  $u$ , deren Ableitungen  $D^\alpha u$  für  $|\alpha| = O(1)k$  in  $L^\infty(\Omega)$  liegen.
- d)  $H^{k,p}(\Omega)$  die Vervollständigung von  $C^{k,p}(\Omega)$  bezgl. der Norm (1.2)
- e)  $H_0^{k,p}(\Omega)$  die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\Omega)$  bezgl. der Norm (1.2)
- f)  $W^{k,p}(\Omega)$  der Raum aller Funktionen  $v \in L^p(\Omega)$ , die für  $|\alpha| = O(1)k$  schwache Ableitungen  $D^\alpha v \in L^p(\Omega)$  besitzen.
- Hierbei heißt  $w$  schwache Ableitung von  $v$ , wenn

$$(1.7) \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega): \int_{\Omega} v D^\alpha u \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \bar{w} u \, dx$$

Wie bei den Ableitungen im "klassischen Sinne" schreiben wir auch hierfür  $w := D^\alpha v$ .

### Bemerkungen

1. Entsprechend der Norm (1.1) in  $C_b(\Omega)$  und  $C(\bar{\Omega})$  läßt sich auch in  $L^\infty(\Omega)$  eine Norm definieren, wobei jetzt

$$(1.8) \quad \|u\|_{o,\infty} := \inf \{K \mid |u(x)| \leq K \text{ für fast alle } x \in \Omega\}$$

das "wesentliche Supremum" von  $u$  auf  $\Omega$  ist.

Für die Abschätzung von Produkten bezüglich der Sobolev-Norm für  $p = 2$  ist es vorteilhaft (entgegen der üblichen Definition (1.1)), für  $u \in H^{k,\infty}(\Omega)$  folgende Seminorm einzuführen:

$$(1.9) \quad |u|_{k,\infty} := \left\| \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha u|^2 \right\|_{o,\infty}^{1/2}$$

Wesentlich hierbei ist, daß das Supremum erst nach der Summation gebildet wird (siehe auch (1.24)).

2. Daß in der Tat  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{o,p})$ ,  $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{o,\infty})$ ,  $(H^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$ ,  $(H_0^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$  und  $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $p \in [1, \infty)$  normierte Räume darstellen, wird als bekannt vorausgesetzt. Im Gegensatz zu den entsprechenden Räumen stetiger Funktionen, sind diese bezüglich dieser Normierung (nach Konstruktion) auch Banachräume.

3. Es gilt allgemein:

$$H_0^{k,p}(\Omega) \subset H^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

Für  $k = 0$  besteht Gleichheit.

Darüber hinaus ist stets  $W^{k,p}(\Omega) = H^{k,p}(\Omega)$  (vergl. ADAMS [3], Theorem 3.16; bei AGMON [5], Theorem 2.2 wird hierzu noch eine gewisse Regularität von  $\Omega$  gefordert). Wir werden deshalb im folgenden nicht mehr zwischen  $W^{k,p}(\Omega)$  und  $H^{k,p}(\Omega)$  unterscheiden.

4. Im Fall  $p = 2$  existiert mit

$$(1.10) \quad (u, v)_k := \sum \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \int_{\Omega} D^{\alpha} u \cdot \overline{D^{\alpha} v} \, dx \quad ; \quad u, v \in H_{(0)}^{k,p}(\Omega)$$

ein inneres Produkt in  $H_{(0)}^{k,p}(\Omega)$ , das die Norm (1.2) erzeugt.

$(L^2(\Omega), (\cdot, \cdot)_0)$ ,  $(H^{k,2}(\Omega), (\cdot, \cdot)_k)$  und  $(H_0^{k,2}(\Omega), (\cdot, \cdot)_k)$  sind somit Hilberträume.

Ferner sind diese Räume separabel und besitzen jeweils ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS), d.h. es existiert eine Folge von Elementen  $e_i, i \in \mathbb{N}$ , aus dem betreffenden Raum mit:

$$(1.11) \quad \forall i, j \in \mathbb{N}: (e_i, e_j)_k = \delta_{ij} \quad (\text{Kroneckersymbol})$$

$$(1.12) \quad \forall u \in H_{(0)}^{k,2}(\Omega): \lim_{N \rightarrow \infty} \|u - \sum_{i=1}^N (u, e_i)_k e_i\|_{k,2} = 0$$

und es gilt die Parsevalsche Gleichung:

$$(1.13) \quad \forall u \in H_{(0)}^{k,2}(\Omega): \|u\|_{k,2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(u, e_i)_k|^2$$

#### Anmerkung

Die Normen und Seminormen  $\|\cdot\|_{k,p}$  bzw.  $|\cdot|_{k,p}$  hängen natürlich auch von  $\Omega$  ab. Wir werden jedoch diese Abhängigkeit nur dann durch weitere Indizierung deutlich machen, wenn von verschiedenen Gebieten die Rede ist.

Da wir uns hauptsächlich mit dem Fall  $p = 2$  befassen, lassen wir hierfür den zweiten Index in den Abschnitten weg, wo der Bezug überall klar ist. Für  $H^{k,2}(\Omega)$ ,  $\|\cdot\|_{k,2}$  bzw.  $|\cdot|_{k,2}$  stehen dann lediglich  $H^k(\Omega)$ ,  $\|\cdot\|_k$  bzw.  $|\cdot|_k$ .

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß definitionsgemäß

$\|\cdot\|_{0,p} = |\cdot|_{0,p}$  ist. Wir werden die erste Schreibweise benutzen, wenn der Normcharakter zum Ausdruck kommen soll.

Die im Zusammenhang mit Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  üblichen Begriffe wie offen, abgeschlossen, beschränkt, konvex, zusammenhängend, einfach zusammenhängend etc. setzen wir als bekannt voraus; darüber hinaus seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

### Definition von Gebietstypen

a) Besitzt  $\Omega$  ein endliches Lebesgue-Maß, so bezeichnen wir mit

$$(1.14) \quad \text{vol}(\Omega) := \int_{\Omega} dx$$

das Volumen von  $\Omega$ .

b)  $\Omega$  ist vom  $C^k$ -Typ, wenn zu jedem Punkt  $x \in \Gamma$  eine Umgebung  $P_x$ , ein Index  $i$  und eine Funktion  $g_x \in C^k(P'_x)$  existieren, so daß für alle  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ :

$$(1.15) \quad y' := (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \in P'_x \Leftrightarrow y_i = g(y') \quad \text{und}$$

$$(1.16) \quad P_x \cap \Omega \subset \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_i > g(y'), y' \in P'_x\},$$

wobei  $P'_x$  die Projektion von  $P_x$  auf die durch  $y_i = 0$  erklärte Hyperebene ist.

Ist jeweils  $g_x \in C^{k,\lambda}(P'_x)$ , so sprechen wir vom  $C^{k,\lambda}$ -Typ.

Gilt dies bis auf endlich viele Ausnahmepunkte des Randes, so sagen wir,  $\Omega$  ist stückweise von  $C^k$ - bzw.  $C^{k,\lambda}$ -Typ.

Hinsichtlich  $\Gamma$  sprechen wir unter diesen Voraussetzungen von einem (stückweisen)  $C^k$ - bzw.  $C^{k,\lambda}$ -Rand.

c)  $\Omega$  besitzt die Segment-Eigenschaft, wenn eine lokal endliche offene Überdeckung  $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  von  $\Omega$  und eine zugehörige Menge von Vektoren  $\{y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  existieren, so daß für alle  $j \in \mathbb{N}$ :

$$(1.17) \quad x \in U_j \cap \bar{\Omega} \Rightarrow \forall t \in (0,1): x + ty_j \in \Omega.$$

d)  $\Omega$  erfüllt die Kegelbedingung, wenn ein Kegel  $C$  existiert, derart, daß zu jedem Punkt  $x \in \Omega$  ein zu  $C$  kongruenter Kegel  $C_x$  existiert, der mit der Spitze in  $x$  gelegen ganz in  $\Omega$  enthalten ist.

Hierbei ist  $C_x$  ein Kegel im  $\mathbb{R}^n$  mit Spitze in  $x$ , wenn zwei Kugeln  $K_1$  und  $K_2$  existieren, derart, daß  $x$  Mittelpunkt von  $K_1$ ,  $x \notin K_2$  und  $C_x = K_1 \cap \{x + t(y-x) \mid y \in K_2, t > 0\}$ .

- e)  $\Omega$  ist von beschränkter Breite, wenn eine Gerade  $g$  und eine reelle Zahl  $\delta > 0$  existieren, so daß für alle Paare von Punkten  $x, y \in \Omega$ , die auf einer zu  $g$  orthogonalen Hyperfläche liegen,  $|x-y|$  (euklidischer Abstand von  $x$  und  $y$ ) kleiner als  $\delta$  ausfällt. Die kleinstmögliche Konstante dieser Art nennen wir die Breite von  $\Omega$ .

### Bemerkungen

1. Sind bei der Kegelbedingung  $r_1$  und  $r_2$  die Radien von  $K_1$  bzw.  $K_2$  und  $e$  die Entfernung ihrer Mittelpunkte, dann sind  $h := r_1$  die Höhe und  $\alpha := 2 \arcsin \frac{r_2}{e}$  der Öffnungswinkel von  $C_x$ . Die Kegelbedingung besagt also, daß zwei positive reelle Zahlen  $h, \alpha$  derart vorgegeben werden können, daß sich zu jedem  $x \in \Omega$  ein Kegel  $C_x$  in  $\Omega$  konstruieren läßt, der die Höhe  $h$  und den Öffnungswinkel  $\alpha$  hat.
2. Ist  $\Omega$  stückweise vom  $C^k$ -Typ, so bedeutet dies, daß sich  $\Gamma$  aus endlich vielen  $C^k$ -Flächen (im Zweidimensionalen:  $C^k$ -Kurven) zusammensetzt. Erfüllt  $\Omega$  darüber hinaus die Kegelbedingung, so bilden diese Flächen miteinander keine "Nullwinkel", d.h. die einseitigen Tangentialableitungen zweier aneinander stoßender Flächen sind verschieden. In der Regel wird man ferner voraussetzen, daß entsprechend (1.16)  $\Omega$  nur auf jeweils einer Seite der Flächen liegt. (Hierdurch werden z.B. im  $\mathbb{R}^2$  "geschlitzte" Bereiche ausgeschlossen.)
3. Ist  $\Omega$  vom  $C^1$ -Typ oder konvex, so erfüllt  $\Omega$  die Kegelbedingung (vergl. z.B. FRIEDMAN [25] S. 22). Erfüllt  $\Omega$  die Kegelbedingung, so besitzt  $\Omega$  auch die Segmenteigenschaft (vergl. z.B. AGMON [5] S. 11).  
Ist  $\Omega$  beschränkt und die Kegelbedingung erfüllt, so ist  $\Omega$  endliche Vereinigung offener Teilmengen vom  $C^{0,1}$ -Typ ("Lipschitz-Typ") (vergl. z.B. ADAMS [3] S. 132).

Nach diesen Definitionen können wir folgende Dichtheitsaussagen machen:

### Lemma 1

Für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $p \in [1, \infty)$  gelten:

- a)  $C_0^\infty(\Omega)$  ist dicht in  $L^p(\Omega)$  (vergl. ADAMS [3], Theorem 2.19)
- b)  $C_0^\infty(\Omega)$  ist dicht in  $H_0^{k,p}(\Omega)$  (Nach Konstruktion von  $H_0^{k,p}(\Omega)$ )

- c)  $C^\infty(\Omega) \cap C^{k,p}(\Omega)$  ist dicht in  $H^{k,p}(\Omega)$  (vergl. ADAMS [3], Theorem 3.16)
- d) Besitzt  $\Omega$  die Segment-Eigenschaft, dann ist die Menge der Restriktionen der Funktionen aus  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $H^{k,p}(\Omega)$  (vergl. ADAMS [3], Theorem 3.18)
- e) Besitzt  $\Omega$  die Segment-Eigenschaft, dann ist  $C^\infty(\bar{\Omega})$  dicht in  $H^{k,p}(\Omega)$  (folgt aus (d)).

Dichtheitsaussagen sind deshalb von besonderem Interesse, da man sich zum Nachweis gewisser Aussagen, die für alle Funktionen einer bestimmten Klasse gelten sollen, auf eine dichte Teilmenge beschränken kann. Hierzu gilt:

#### Lemma 2 (Stetigkeitslemma)

Sind  $(R, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum,  $D$  eine dichte Teilmenge von  $R$  und  $F, G: R \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Abbildungen mit

$$(1.18) \quad \forall u \in D: F(u) \leq G(u) ,$$

so gilt diese Ungleichung auch für alle  $r \in R$ . Entsprechendes gilt für eine Gleichung, wenn  $F, G: R \rightarrow S$  und  $S$  ein weiterer normierter Raum ist.

#### Beweis

Sei  $r \in R$  beliebig vorgegeben. Wegen der Dichtheit von  $D$  in  $R$  und der Stetigkeit von  $F$  und  $G$ , existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $u \in D$  mit

$$(1.19) \quad |F(r) - F(u)| < \frac{\varepsilon}{2} , \quad |G(r) - G(u)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Aus der Dreiecksungleichung für den Betrag folgt dann:

$$\begin{aligned} F(r) &\leq |F(r) - F(u)| + F(u) \stackrel{(1.19)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + F(u) \\ &\stackrel{(1.18)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + G(u) \leq \frac{\varepsilon}{2} + |G(u) - G(r)| + G(r) \\ &\stackrel{(1.19)}{\leq} \varepsilon + G(r) \end{aligned}$$

Für den Fall  $F, G: R \rightarrow S$  steht in (1.19) anstelle des Betrages die Norm in  $S$  und wir erhalten durch Einschieben von  $F(u) = G(u)$ :

$$\|F(r) - G(r)\| \leq \|F(r) - F(u)\| + \|G(u) - G(r)\| < \varepsilon$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt jeweils die entsprechende Beziehung auch für  $r \in \mathbb{R}$ .

Neben der als Normeigenschaft bekannten Dreiecksungleichung werden wir die folgenden Ungleichungen und Einbettungssätze benutzen:

a) Mittelungleichung (MU)

$$(1.20) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0: \quad 2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$$

mit Gleichheit, wenn  $b = \varepsilon a$ .

$$(\text{Folgt aus } (\sqrt{\varepsilon} a - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} b)^2 \geq 0)$$

b) Höldersche Ungleichung (HU)

Es seien  $p, q \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , dann gilt:

$$(1.21) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n: \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$$

$$(1.22) \quad \forall u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega): \quad \int_{\Omega} |u \cdot v| dx \leq \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |v|^q dx \right)^{1/q}$$

Hierbei besteht Gleichheit, wenn  $x$  proportional zu  $y$  bzw.  $u$  proportional zu  $v$  ist.

(vergl. z.B. BACHMANN-NARICI [8] Theorem 8.2 und ADAMS [3] Theorem 2.3)

c) Schwarzsche Ungleichung (SU)

Spezialfall von (1.21) bzw. (1.22) mit  $p := q := 2$

d) Einbettung von Produkten in  $L^S(\Omega)$

Es seien  $s \in [1, \infty)$  und  $p, q \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  oder  $p = 1, q = \infty$ .

Sind  $u \in L^{ps}(\Omega)$  und  $v \in L^{qs}(\Omega)$ , so ist  $w := u \cdot v \in L^S(\Omega)$  und es gilt:

$$(1.23) \quad \|u \cdot v\|_{0,S} \leq \|u\|_{0,ps} \|v\|_{0,qS} \quad (qS = \infty \text{ für } q = \infty)$$

(Folgt für  $p, q \in (1, \infty)$  aus (1.22), indem man dort  $u$  durch  $|u|^S$  und  $v$  durch  $|v|^S$  ersetzt; für  $p = 1, q = \infty$  bedeutet (1.23) gerade das Herausziehen des wesentlichen Supremums von  $v$ .)

In Zusammenhang mit der Definition (1.9) vermerken wir für  $n = 2$ ,  $u \in H^{1,\infty}(\Omega)$ ,  $v \in H^{1,2}(\Omega)$  insbesondere:

$$(1.24) \quad |D_1 u D_2 v + D_2 u D_1 v|_{0,2} \leq |u|_{1,\infty} |v|_{1,2}$$

Dies folgt aus:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D_1 u D_2 v + D_2 u D_1 v|^2 dx &\leq \int_{SU} (|D_1 u|^2 + |D_2 u|^2) (|D_1 v|^2 + |D_2 v|^2) dx \\ &\leq \| |D_1 u|^2 + |D_2 u|^2 \|_{0,\infty} \| |D_1 v|^2 + |D_2 v|^2 \|_{0,2}^2 = |u|_{1,\infty}^2 |v|_{1,2}^2. \end{aligned} \quad (1.23)$$

e) Poincarésche Ungleichung (PU)

Es sei  $\Omega$  von beschränkter Breite  $\delta$  und  $k \in \mathbb{N}$ ; dann gilt

$$(1.25) \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega): \quad |u|_{j,2} \leq \delta^{k-j} |u|_{k,2} \quad \text{für } j = O(1)k.$$

(Vergl. AGMON [5] Lemma 7.3; die entsprechende Formel in [5] enthält noch eine weitere Konstante, die aber hier wegen der Definition von  $|\cdot|_{j,1}$  nach (1.5) entfällt.)

Nach dem Stetigkeitslemma gilt diese Ungleichung auch für  $u \in H_0^{k,2}(\Omega)$ .

f) Einbettung von  $H^{k,p}(\Omega)$  in  $H^{j,p}(\Omega)$

Es sei  $p \in [1, \infty)$  oder auch  $p = \infty$  und  $j, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $j \leq k$ .

Dann ist  $H^{k,p}(\Omega) \subset H^{j,p}(\Omega)$  und es gelten:

$$(1.26) \quad \forall u \in H^{k,p}(\Omega): \quad \|u\|_{j,p} \leq \|u\|_{k,p}$$

$$(1.27) \quad \forall u \in H^{k,p}(\Omega): \quad \|D^\alpha u\|_{j,p} \leq \|u\|_{j+|\alpha|,p} \quad \text{für } |\alpha| \leq k - j$$

(Beide Ungleichungen folgen unmittelbar aus der Definition von  $|\cdot|_{k,p}$ .)

g) Einbettung von  $L^q(\Omega)$  in  $L^p(\Omega)$

$\Omega$  habe ein beschränktes Volumen und es sei  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ; dann gilt  $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  und

$$(1.28) \quad \forall u \in L^q(\Omega): \quad \|u\|_{0,p} \leq [\text{vol}(\Omega)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_{0,q}$$

(Vergl. ADAMS [3] Theorem 2.8;  $1/\infty := 0$ )

h) Einbettung von  $H^{k,p}(\Omega)$  in  $L^q(\Omega)$

$\Omega$  erfülle die Kegelbedingung; es sei  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $1 \leq p \leq q$  und

(i)  $kp < n \wedge q \leq \frac{np}{n-kp}$  oder (ii)  $kp = n \wedge q < \infty$ .

Dann gilt  $H^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  und

$$(1.29) \quad \exists K: \forall u \in H^{k,p}(\Omega): \|u\|_{o,q} \leq K \|u\|_{k,p}.$$

(Vergl. ADAMS [3] Theorem 5.4, (4) und (6))

i) Einbettung von  $H^{k,p}(\Omega)$  in  $C_b(\Omega)$

$\Omega$  erfülle die Kegelbedingung; es sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 1$  und  $kp > n$ .

Dann gilt  $H^{k,p}(\Omega) \subset C_b(\Omega)$  (in dem Sinne, daß jedes Element aus  $H^{k,p}(\Omega)$  als Äquivalenzklasse von Funktionen einen Vertreter aus  $C_b(\Omega)$  enthält) und

$$(1.30) \quad \exists K: \forall u \in H^{k,p}(\Omega): \|u\|_{o,\infty} \leq K \|u\|_{k,p}.$$

Für  $k = n$  gilt ferner die Einbettung von  $H^{k,1}(\Omega)$  in  $C_b(\Omega)$  und (1.30) für  $p = 1$  und  $k = n$ .

(Vergl. ADAMS [3] Theorem 5.4, (7) und (8))

j) Einbettung von  $H^{k,p}(\Omega) \cap H_0^{1,q}(\Omega)$  in  $C(\bar{\Omega})$

$\Omega$  erfülle die Kegelbedingung; es sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p, q \geq 1$  und  $kp > n$ .

Dann ist  $H^{k,p}(\Omega) \cap H_0^{1,q}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$  und allgemeiner

$H^{k+j,p}(\Omega) \cap H_0^{1+j,q}(\Omega) \subset C^j(\bar{\Omega})$  für  $j \in \mathbb{N}_0$ .

(Vergl. ADAMS [4] Theorem 1)

k) Einbettung von Produkten in  $H^{k,p}(\Omega)$

$\Omega$  erfülle die Kegelbedingung und es sei  $kp > n$ ; dann gilt im Falle  $|\alpha| + |\beta| \leq k$

$$(1.31) \quad \exists K: \forall u, v \in H^{k,p}(\Omega): \|D^\alpha u D^\beta v\|_{o,p} \leq K \|u\|_{k,p} \|v\|_{k,p}$$

und folglich

$$(1.32) \quad \exists K: \forall u, v \in H^{k,p}(\Omega): \|uv\|_{k,p} \leq K \|u\|_{k,p} \|v\|_{k,p}.$$

(Vergl. ADAMS [3] Theorem 5.23)

### Bemerkungen

1. Die Konstante K aus (1.29) bis (1.32) hängt in der Regel ab von  $n, p, q, k$  und dem für  $\Omega$  charakteristischen Kegel  $\cdot C$ .
2. Aus (h) und (i) folgen für  $j \in \mathbb{N}$  unter denselben Voraussetzungen die entsprechenden Einbettungen von  $H^{k+j, p}(\Omega)$  in  $H^{j, q}(\Omega)$  bzw. in  $C_b^j(\Omega)$ . (Vergl. ADAMS [3] S. 98)
3. Ohne Bedingung an  $\Omega$  gelten die Einbettungen (h) und (i), wenn anstelle des einzubettenden H-Raumes der entsprechende  $H_0$ -Raum steht. (Vergl. ADAMS [3] Theorem 5.4 (III))
4. Jede Einbettung ist zu sehen als lineare, injektive Abbildung von dem einzubettenden Raum in den anderen. Die zugehörige Ungleichung besagt, daß diese Abbildung stetig ist. In gewissen Fällen ist sie darüber hinaus auch kompakt, d.h. sie bildet beschränkte Mengen in relativ kompakte ab. Für unsere Zwecke führen wir den folgenden Fall an:  
Ist  $\Omega$  beschränkt, dann ist für  $k \in \mathbb{N}$  die Einbettung von  $H_0^{k, 2}(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$  kompakt.  
(Vergl. die entsprechenden Sätze von RELICH - z.B.: Theorem 6.2 bei ADAMS [3] und Theorem 3.8 sowie 8.3 bei AGMON [5];  
beachte:  $H_0^{0, 2}(\Omega) = L^2(\Omega)$ )

### 2. Das Dirichletproblem

Wie in Abschnitt 1 sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ ; nähere Einschränkungen werden im folgenden stets angegeben.

Zu  $m \in \mathbb{N}$  definieren wir den Operator L formal durch

$$(2.1) \quad L := \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta),$$

wobei  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$  und

$$(2.2) \quad a_{\alpha\beta} \in C_b^{|\alpha|}(\Omega) \quad \text{für} \quad |\alpha|, |\beta| = O(1)m; \quad a_{\alpha\beta} \in C^m(\bar{\Omega}) \quad \text{für} \quad |\alpha| = |\beta| = m.$$

Mit (2.2) besitzt  $L$  auch die Form

$$(2.3) \quad L = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha} D^{\alpha} \quad \text{mit} \quad a_{\alpha} \in C(\bar{\Omega})$$

und für  $w \in H^{2m}(\Omega)$  gilt

$$\begin{aligned} \|Lw\|_{0,2} &\leq \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|a_{\alpha} D^{\alpha} w\|_{0,2} \stackrel{(1.24)}{\leq} \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|a_{\alpha}\|_{0,\infty} \|D^{\alpha} w\|_{0,2} \\ &\leq \sum \|a_{\alpha}\|_{0,\infty} \|w\|_{2m,2} . \end{aligned}$$

$L$  ist damit ein linearer Differentialoperator der Ordnung  $2m$  und als Abbildung von  $H^{2m}(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$  beschränkt. Mit

$$(2.4) \quad \forall u, v \in H^m(\Omega): \quad d(u, v) := \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (D^{\alpha} u, a_{\alpha\beta} D^{\beta} v)_0$$

besitzt  $L$  eine Dirichletsche Bilinearform (DBF), d.h. eine bilineare Abbildung  $d: H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$  mit folgender Eigenschaft:

$$(2.5) \quad \forall u, v \in C_0^{\infty}(\Omega): \quad d(u, v) = (u, Lv)_0$$

Über (2.2) hinaus werden wir voraussetzen, daß  $L$  gleichmäßig streng elliptisch auf  $\Omega$  ist, d.h. es gilt:

$$(2.6) \quad \exists K > 0: \forall x \in \Omega, y \in \mathbb{R}^n: \operatorname{Re} \left\{ \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x) y^{\alpha+\beta} \right\} \geq K |y|^{2m} ,$$

wobei  $|y|$  die euklidische Norm von  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  und

$$\text{für } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n: \quad y^{\alpha} := \prod_{j=1}^n y_j^{\alpha_j} .$$

Bekanntlich ist für solche Differentialoperatoren die folgende Aufgabenstellung sinnvoll:

#### Definition des klassischen Dirichletproblems

Es sei  $\Omega$  stückweise vom  $C^{m-1}$ -Typ,  $r \in C(\Omega)$  und  $g_j \in C(\Gamma)$  für  $j = 0(1)m-1$ . Dann heißt  $v$  Lösung des klassischen Dirichletproblems (KDP) zu  $L$ ,  $r$  und  $g := (g_0, \dots, g_{m-1})$ , wenn:

$$(2.7) \quad v \in C^{m-1}(\bar{\Omega}) \cap C^{2m}(\Omega)$$

$$(2.8) \quad Lv = r \quad \text{auf } \Omega$$

$$(2.9) \quad \left. \frac{\partial^j v}{\partial \nu^j} \right|_{\Gamma} = g_j, \quad j = 0(1)m-1$$

Hierbei bezeichnet  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen. (Nach Voraussetzung ist diese bis auf endlich viele Stellen des Randes wohldefiniert.) Im Falle  $g_j = 0$ ,  $j = 0(1)m-1$  sprechen wir vom homogenen KDP (hKDP).

Die obigen Voraussetzungen an  $\Omega$ ,  $r$  und  $g$  sind bereits von der Problemstellung her notwendig. Die Lösbarkeit ist jedoch unter diesen Voraussetzungen im allgemeinen nicht gesichert.

Unter Umständen ist es angebracht, von einer auf  $\bar{\Omega}$  erklärten Funktion  $w$  auszugehen, welche die geforderten Randeigenschaften aufweist (zur Existenz und Konstruktion sei z.B. verwiesen auf FRIEDMAN [25], Lemma 14.1; siehe auch Kapitel V, Satz 1). Von der "Lösung"  $v$  wird man dann anstelle von (2.9) verlangen, daß die ersten  $m-1$  Ableitungen mit den entsprechenden von  $w$  auf dem Rand übereinstimmen. Dies ist zumindest im wesentlichen erfüllt, wenn die Differenz  $v-w$  in  $H_0^m(\Omega)$  liegt (vergl. FRIEDMAN [25], Lemma 13.2 und 13.3 sowie AGMON [5], S. 97).

Bei genügender Regularität von  $\Omega$  und der Koeffizientenfunktionen  $a_{\alpha\beta}$  ist (2.5) auch für alle  $u, v \in C^{2m}(\bar{\Omega})$  gegeben, die (2.9) für  $g = 0$  erfüllen (vergl. AGMON [5] Theorem 10.2).

Diese Überlegungen führen auf folgende Verallgemeinerung:

#### Definition des VDP

Es seien  $r \in L^2(\Omega)$ ,  $w \in H^m(\Omega)$  und  $d$  die DBF aus (2.4). Dann heißt  $v$  Lösung des verallgemeinerten Dirichletproblems (VDP) zu  $L$ ,  $r$  und  $w$ , wenn

$$(2.10) \quad v - w \in H_0^m(\Omega)$$

$$(2.11) \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega): \quad d(u, v) = (u, r)_0$$

Im Fall  $w = 0$  sprechen wir vom homogenen VDP (hVDP).

Wir sagen,  $v$  ist starke Lösung des (homogenen) VDP, wenn darüber hinaus  $v \in H^{2m}(\Omega)$  und damit  $Lv = r$ .

Die letzte Gleichung folgt aus (2.5) und (2.11), indem

$$(2.12) \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega): \quad (u, Lv)_0 - d(u, v) = (u, r)_0.$$

Da  $C_0^\infty(\Omega)$  dicht in  $L^2(\Omega)$  liegt, folgt aus (2.12)  $Lv = r$ . (Man beachte, daß für (2.4) lediglich  $u$  oder  $v$  kompakten Träger besitzen müssen.)

Nach Definition ist jede starke Lösung auch Lösung des VDP schlechthin. Ist  $w$  eine zu  $g$  entsprechend konstruierte Funktion und  $v$  Lösung des KDP, so ist unter genügenden Glattheitsvoraussetzungen (hinreichend:  $\Omega$  vom  $C^m$ -Typ und  $v \in C^m(\bar{\Omega})$  - vergl. FRIEDMAN [25] Lemma 13.3)  $v - w \in H_0^m(\Omega)$  und damit  $v$  Lösung des entsprechenden VDP. Von großer Bedeutung ist, daß unter genügenden Regularitätsvoraussetzungen auch die Umkehrung gilt, d.h. eine Lösung des VDP ist unter gewissen Voraussetzungen Lösung im starken oder gar im klassischen Sinne (siehe Satz 2); hierbei läßt sich die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des VDP unter recht schwachen Voraussetzungen leicht zeigen:

Aus der Linearität von  $L$  folgt im Falle  $w \in H^{2m}(\Omega)$ :

$$(2.13) \quad v \text{ starke Lsg. des VDP zu } L, r \text{ und } w \Leftrightarrow \\ \tilde{v} := v - w \text{ starke Lsg. des hVDP zu } L \text{ und } \tilde{r} := r - Lw$$

Damit ist die Lösung des Dirichletproblems im wesentlichen auf die Lösung des homogenen Problems zurückgeführt. Hinsichtlich des letzten gilt

#### Satz 1

Es existiere eine reelle Zahl  $c_L > 0$  mit

$$(2.14) \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega): \quad |(u, Lu)_\Omega| \geq c_L \|u\|_{m,2}^2,$$

dann gilt:

- a) Das hVDP ist zu vorgegebenem  $r \in L^2(\Omega)$  eindeutig lösbar.
- b) Es sei  $d$  die obige DBF zu  $L$ ; dann wird durch die Vorschrift

$$(2.15) \quad \forall r \in L^2(\Omega): \quad Tr := v \Leftrightarrow \forall u \in C_0^\infty(\Omega): \quad d(u, v) = (u, r)_\Omega$$

eine lineare Abbildung  $T: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  erklärt.  $T$  ist injektiv und beschränkt, wobei

$$(2.16) \quad \|T\| \leq \frac{1}{c_L}$$

- c) Ist  $a_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\beta\alpha}$  für  $|\alpha|, |\beta| = O(1)_m$ , so ist  $T$  selbstadjungiert.
- d) Gilt (im Falle von (c)) (2.14) ohne Betragstriche, so ist  $T$  (darüber hinaus) positiv definit.

- e) Ist  $\Omega$  beschränkt, so ist  $T$  kompakt. Unter den Zusatzbedingungen aus (c) und (d) gilt dann insbesondere: Das Spektrum von  $T$  besteht aus positiven Eigenwerten, die sich bei Null häufen, die zugehörigen Eigenfunktionen bilden ein VONS zu  $L^2(\Omega)$  und mit dem größten Eigenwert  $\mu_1$  von  $T$  gilt:

$$(2.17) \quad \mu_1 = \sup_{0 \neq r \in L^2(\Omega)} \frac{(\text{Tr}, r)_0}{(r, r)_0} = \|T\| \leq \frac{1}{c_L}$$

Das Supremum wird angenommen, wenn  $r$  Eigenfunktion zu  $\mu_1$  ist.

### Beweis

- a) Die nach oben definierte DBF  $d$  ist beschränkt, indem

$$\begin{aligned} |d(u, v)| &\leq \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} |(D^\alpha u, a_{\alpha\beta} D^\beta v)_0| \leq_{SU} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \|D^\alpha u\|_{0,2} \|a_{\alpha\beta} D^\beta v\|_{0,2} \\ &\stackrel{(1.23)}{\leq} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \|a_{\alpha\beta}\|_{C, \infty} \|D^\alpha u\|_{0,2} \|D^\beta v\|_{0,2} \\ &\leq \max_{SU} \alpha, \beta \|a_{\alpha\beta}\|_{0, \infty} \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{0,2}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{|\beta| \leq m} \|D^\beta v\|_{0,2}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \max_{\alpha, \beta} \|a_{\alpha\beta}\|_{0, \infty} \|u\|_{m,2} \|v\|_{m,2} \end{aligned}$$

Aus (2.14) und (2.5) folgt andererseits:

$$(2.18) \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega): \quad |d(u, u)| \geq c_L \|u\|_{m,2}^2$$

Da  $C_0^\infty(\Omega)$  dicht in  $H_0^m(\Omega)$  liegt und  $d$  beschränkt ist, gilt diese Ungleichung aus Stetigkeitsgründen auch auf  $H_0^m(\Omega)$  (vergl. Lemma 1).

Ferner wird zu vorgegebenem  $r \in L^2(\Omega)$  durch

$$\forall u \in H_0^m(\Omega): \quad g(u) := (u, r)_0$$

ein koniäres Funktional auf  $H_0^m(\Omega)$  erklärt.

$d$  und  $g$  erfüllen damit die Voraussetzungen des Lemmas von LAX-MILGRAM (Kapitel I, S. 13). Dessen Aussage bedeutet aber gerade die Existenz einer eindeutigen Lösung des hVDP zu  $r$ .

- b) Nach (a) ist  $T$  wohldefiniert. Die Linearität folgt aus der Bilinearität von  $d$  und des inneren Produkts in  $L^2(\Omega)$ . Man beachte, daß nach (a) das Bild von  $T$  in  $H_0^m(\Omega)$  liegt und (2.15) ebenso wie (2.14) auch für alle

$\forall u \in H_0^m(\Omega)$  gültig ist. Für  $u := v = \text{Tr}$  folgt speziell:

$$(2.19) \quad \|\text{Tr}\|_{m,2}^2 \leq \frac{1}{c_L} |d(\text{Tr}, \text{Tr})| \stackrel{(2.15)}{=} \frac{1}{c_L} |(\text{Tr}, r)_0| \leq \frac{1}{c_L} \|\text{Tr}\|_{0,2} \|r\|_{0,2}$$

Hieraus folgt die Beschränktheit von  $T$  mit  $\|T\| \leq \frac{1}{c_L}$  auch als Abbildung von  $L^2(\Omega)$  in  $H_0^m(\Omega)$ .

- c) Aus (2.14) folgen die entsprechenden Aussagen für die zugehörigen "formal Adjungierten"

$$(2.20) \quad L^* := \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\bar{a}_{\beta\alpha} D^\beta),$$

$$d^*(u, v) := \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (D^\alpha u, \bar{a}_{\beta\alpha} D^\beta v)_0$$

Die analog zu konstruierende Abbildung  $T^*$  ist in der Tat die in  $L^2(\Omega)$  adjungierte Abbildung zu  $T$ . Dies folgt im wesentlichen aus dem Zusammenhang

$$(2.21) \quad \forall u, v \in C_0^\infty(\Omega): d(u, v) = (u, Lv)_0 = (L^*u, v)_0 = \overline{d^*(v, u)}$$

(vergl. auch AGMON [5] Theorem 8.4)

Für  $a_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\beta\alpha}$  ist  $L^* = L$  und  $d^* = d$ , womit  $T = T^*$  und  $T$  selbstadjungiert ist.

- c) Unter der Voraussetzung aus (d) gilt

$$(2.22) \quad \forall u \in H_0^m(\Omega): d(u, u) \geq c_L \|u\|_{m,2}^2$$

Für  $u := v = \text{Tr}$  ergibt sich wieder aus (2.14) - (2.15)

$$c_L \|\text{Tr}\|_{m,2}^2 \leq d(\text{Tr}, \text{Tr}) = (\text{Tr}, r)_0,$$

womit  $(\text{Tr}, r)_0 > 0$  für  $r \neq 0$  ( $T$  injektiv!).

- e) Nach (2.19) bildet  $T$  beschränkte Mengen aus  $L^2(\Omega)$  in beschränkte Mengen von  $H_0^m(\Omega)$  ab. Ist  $\Omega$  beschränkt, so ist nach Bemerkung 4, S.56 die Einbettung von  $H_0^m(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$  kompakt. Damit ist aber  $T$  als Abbildung von  $L^2(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$  ebenfalls kompakt. Die Behauptungen sind hiermit bekannte Ergebnisse aus der Theorie selbstadjungierter, kompakter Operatoren im Hilbertraum. (Vergl. z.B.: MANGOLDT-KNOPP [34] Bd. IV, Nr. 135-141; SCHMEIDLER [45], § 12; ACHIESER-GLASMAN [2] Kapitel V; BACHMANN-NARICI [8] Chapter 25) ▲

## Bemerkungen

1. Durch (2.5) ist eine DBF zu L in der Regel nicht eindeutig bestimmt (vergl. AGMON [5], S. 96). Ferner gelten die obigen Schlüsse mit jeder beschränkten DBF zu L. Ist jedoch  $\tilde{d}$  eine weitere beschränkte DBF zu L, so stimmen d und  $\tilde{d}$  wegen (2.5) zunächst auf  $C_0^\infty(\Omega)$  und damit auf  $H_0^m(\Omega)$  überein. Ist v Lösung des hVDP zu d und r, so ist deshalb v auch die eindeutig bestimmte Lösung des hVDP zu  $\tilde{d}$  und r. Die Lösung des VDP hängt also nicht von der jeweils betrachteten DBF ab, und wir können nachträglich in der obigen Definition des VDP jede beliebige beschränkte DBF zu L zulassen. (Bei AGMON [5] oder FRIEDMAN [25] z.B. wurde versäumt, auf diesen Umstand hinzuweisen.)

2. Für die Aussagen des Satzes wurde neben (2.18) lediglich benötigt, daß die DBF d beschränkt ist. Dies ist bereits für  $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $|\alpha|, |\beta| = O(1)_m$  der Fall. Hierfür stellt allerdings L keinen echten Differentialoperator mehr dar. Die Aussagen beziehen sich dann alle auf die DBF.

Ist L gleichmäßig streng elliptisch auf  $\Omega$  und (2.2) erfüllt, so gilt die Gårdingsche Ungleichung (GU) (vergl. AGMON [5] Theorem 7.6), d.h.

$$(2.23) \quad \exists k_m > 0, k_0 \in \mathbb{R}: \forall u \in C_0^\infty(\Omega): \operatorname{Re}\{d(u, u)\} \geq k_m \|u\|_m^2 - k_0 \|u\|_0^2$$

Ist hierin speziell  $k_0 \leq 0$  möglich, so folgt (2.14) bzw. (2.18) aus der GU mit  $c_L := k_m$ .

Andernfalls betrachtet man für  $k \geq k_0$  die Bilinearform  $d_k(u, v) := d(u, v) + k(u, v)_0$ . Diese erfüllt wieder (2.18) und induziert eine entsprechende koniare, injektive Abbildung  $T_k$ . Ist  $\Omega$  beschränkt, so ist  $T_k$  kompakt. Aus der Fredholmschen Alternative für  $T_k$  (vergl. z.B. BACHMAN-NARICI [8] Theorem A 11, S. 402; SCHMEIDLER [45] § 7) lassen sich dann wieder entsprechende Lösbarkeitsaussagen hinsichtlich des VDP machen (siehe z.B. AGMON [5] Theorem 8.5).

3. L sei gleichmäßig streng elliptisch auf  $\Omega$  und bestehe nur aus dem Hauptteil (d.h.  $a_{\alpha\beta} = 0$  für  $|\alpha| + |\beta| < 2m$ ). Ist ferner (2.2) erfüllt, so gilt mit der "Elliptizitätskonstanten" K aus (2.6)

$$(2.24) \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega): \operatorname{Re}\{d(u, u)\} \geq K \|u\|_m^2.$$

(Vergl. den Beweis von Theorem 12.1 bei FRIEDMAN [25])

Ist  $\Omega$  von beschränkter Breite, so ist für  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  nach der PU  $\|u\|_m$  durch  $|u|_m$  abschätzbar (vergl. (1.25)). In diesem Fall gilt also die GU mit  $k_0 = 0$  und damit nach Bemerkung 2 die eindeutige Lösbarkeit des hVDP.

4. Sind die Lösungen des hVDP starke Lösungen, so sind die Eigenfunktionen von  $T$  gerade die Eigenfunktionen von  $L$  und die Eigenwerte die Reziproken. Unter den entsprechenden Voraussetzungen ist dann (2.17) äquivalent zu

$$(2.25) \quad \frac{1}{\mu_1} = \inf_{\substack{0 \neq u \in \\ H_0^m \cap H^{2m}}} \frac{(u, Lu)_0}{(u, u)_0} \leq c_L$$

Das Infimum wird angenommen, wenn  $u$  Eigenfunktion zum kleinsten Eigenwert  $\lambda_1 := \frac{1}{\mu_1}$  von  $L$  ist.

#### Anmerkung

Die charakteristischen Werte  $\lambda_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , und die zugehörigen Funktionen aus Bemerkung 4 nennen wir die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen des DP.

#### Beispiel

Die oben genannten Eigenschaften bezüglich  $L$  bzw. der zugehörigen DBF sind alle gegeben, wenn

$$(2.26) \quad L := (-1)^m \Delta^m \quad \text{mit} \quad \Delta := \sum_{i=1}^n D_i^2$$

Durch formales Potenzieren erhalten wir:

$$L = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} D_1^{2\alpha_1} \dots D_n^{2\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \frac{m!}{\alpha!} D^{2\alpha}$$

d.h.  $L$  hat die Form (2.1) mit  $a_{\alpha\beta} := \frac{m!}{\alpha!}$  für  $\alpha = \beta$  mit  $|\alpha| = m$  und  $a_{\alpha\beta} := 0$  sonst;  $L$  besteht nur aus dem Hauptteil; die Koeffizientenfunktionen sind reelle Konstanten und  $L$  ist formal selbstadjungiert ( $a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}}$ ). Ferner sehen wir ebenfalls sofort, daß  $L$  auf jeder Teilmenge  $\Omega$  des  $\mathbb{R}^n$  gleichmäßig streng elliptisch ist, da andererseits für jeden Vektor  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\sum_{|\alpha|, |\beta|=m} a_{\alpha\beta} y^{\alpha+\beta} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} y^{2\alpha} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} y_1^{2\alpha_1} \dots y_n^{2\alpha_n} = |y|^{2m}$$

Wir haben hier also gerade den "Idealfall", wo in (2.6) Gleichheit mit  $K = 1$  besteht. Die DBF (2.4) hat die Form

$$(2.27) \quad \forall u, v \in H^m(\Omega): d(u, v) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha u, D^\alpha v)_0.$$

Wir verifizieren sofort, daß in Einklang mit (2.24)

$$(2.28) \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega): d(u, u) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha u|^2 = |u|_m^2.$$

Ist also  $\Omega$  von beschränkter Breite  $\delta$ , dann folgt aus der PU mit  $k_m > 0$

$$(2.29) \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega): d(u, u) \geq k_m \|u\|_m^2.$$

### Satz 2 (Regularitätssatz)

a) Es sei  $2(m+1) > n$  und  $\Omega$  erfülle die Kegelbedingung. Dann ist  $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega) \subset C^{m-1}(\bar{\Omega})$ . Ist  $u \in H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$  und der Rand bei  $x \in \Gamma$  ein  $C^{m-1,1}$ -Rand, so gilt

$$(2.30) \quad D^\alpha u(x) = 0 \quad \text{für} \quad |\alpha| = O(1)m-1$$

b) Es sei  $\Omega$  beschränkt und von  $C^{2m}$ -Typ.  $L$  sei gleichmäßig streng elliptisch auf  $\Omega$  mit Koeffizientenfunktionen  $a_{\alpha\beta}$  gemäß (2.2). Ist dann  $v$  Lösung des hVDP zu  $L$  und  $r \in L^2(\Omega)$ , so ist  $v$  starke Lösung, indem mit einer von  $v$  unabhängigen Konstanten  $C > 0$

$$(2.31) \quad \|v\|_{2m} \leq C(\|r\|_0 + \|v\|_0).$$

Sind darüber hinaus  $\Omega$  vom  $C^{2m+j}$ -Typ,  $a_{\alpha\beta} \in C^{|\alpha|+j}(\bar{\Omega})$  für  $|\alpha| = O(1)m$  und  $r \in C^j(\Omega)$  mit  $j := 1 + [\frac{n}{2}]$ , so ist  $v$  auch Lösung des hKDP zu  $L$  und  $r$ .

### Beweis

a) Die erste Aussage folgt aus Einbettung (j), S. 55, indem wir dort  $p := q := 2$ ,  $j := m-1$  und  $k := m+1$  setzen.

Die zweite Aussage erhalten wir aus folgendem Hilfssatz:

Es sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $\Omega'$  eine beschränkte Teilmenge von  $\Omega$  vom  $C^{0,1}$ -Typ. Es seien  $u \in H_0^{1,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}')$  und  $x \in \Gamma'$  (Rand von  $\Omega'$ ). Existiert eine Umgebung  $N$  von  $x$  mit  $N \cap \Gamma' \subset \Gamma$ , dann ist  $u(x) = 0$ .

Dieser Hilfssatz ist zitiert aus ADAMS [4] (Lemma 2) und stellt eine Verschärfung der bis dahin bekannten entsprechenden Aussage für Gebiete mit genügend glattem Rand dar (vgl. z.B. FRIEDMAN [25], Lemma 14.2).

Wir erhalten unsere Aussage, indem wir den Hilfssatz jeweils auf die entsprechende Ableitung von  $v$  anwenden; das Gebiet  $\Omega'$  kann nach Voraussetzung zu  $x$  entsprechend konstruiert werden (beachte:

$$H_0^{1,2}(\Omega) \subset H_0^{1,1}(\Omega).$$

b) Sind  $\Omega$  beschränkt,  $L$  gleichmäßig streng elliptisch auf  $\Omega$ ,  $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$  und  $v$  Lösung des hVDP zu  $L$  und  $r$ , so gelten mit  $i \in \mathbb{N}_0$  u.a. folgende Regularitätsaussagen:

1. Ist  $\Omega$  vom  $C^{2m+i}$ -Typ,  $a_{\alpha\beta} \in C^{|\alpha|+i}(\bar{\Omega})$ ,  $|\alpha| = O(1)m$  und  $r \in H^i(\Omega)$ , dann ist  $v \in H^{2m+i}(\Omega)$  und es existiert eine Konstante  $K$ , so daß

$$\|v\|_{2m+i} \leq K(\|r\|_i + \|v\|_0)$$

2. Sind  $2m+i > [\frac{n}{2}]$ ,  $\Omega$  vom  $C^{2m+i}$ -Typ,  $a_{\alpha\beta} \in C^{|\alpha|+i}(\bar{\Omega})$  für  $|\alpha| = O(1)m$  und  $r \in C^i(\Omega)$ , dann ist  $v \in C^1(\Omega)$  mit  $1 := 2m+i-1-[\frac{n}{2}]$ .

Zum Beweis sei auf AGMON [5] Theorem 9.8 und auf FRIEDMAN [25] Theorem 17.2 und 17.3 verwiesen.

Die erste Behauptung von (b) ist gerade die 1. Regularitätsaussage mit  $i = 0$ . Bezüglich der Aussage zum hKDP wählen wir in der 2. Regularitätsaussage  $i := 1 + [\frac{n}{2}]$ . Nach (a) bleibt dann lediglich zu zeigen, daß  $v \in C^{m-1}(\bar{\Omega})$  ist. Dies folgt jedoch wieder aus der Einbettung (j) mit  $p := q := 2$ ,  $j := m-1$  und  $k := 2m+i-j = m+i+1$ ; denn  $\Omega$  ist (zumindest) vom  $C^1$ -Typ, erfüllt also die Kegelbedingung und nach der 1. Regularitätsaussage ist  $v \in H^{2m+i}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ , wobei nach Definition von  $i$  natürlich  $m+i+1 > \frac{n}{2}$ . ▲

### Bemerkungen

1. In Spezialfällen lassen sich zum Teil stärkere Aussagen machen. So ist z.B. für jedes einfach zusammenhängende Gebiet der Ebene das KDP zu  $L := -\Delta$ ,  $r := 0$  und  $g_0 \in C(\Gamma)$  (siehe (2.9)) eindeutig lösbar (vergl. PETROVSKY [43] § 37,1.); ferner existiert hierfür genau eine starke Lösung des VDP, wenn  $g_0$  beschränkt ist und nur endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt; bezüglich dieser und weiterer Aussagen für den Fall  $L = -\Delta$  sei verwiesen auf COURANT-HILBERT [17], LIONS-MAGENES [33] und MIRANDA [38].

Die entsprechende Aussage hinsichtlich des KDP gilt für  $L := \Delta^2$  unter den zusätzlichen Voraussetzungen, daß  $\Omega$  stückweise vom  $C^3$ -Typ ist und die Randfunktionen  $g_0, g_1$  aus  $C^2(\Gamma)$  sind (vergl. PETROVSKY [43] § 37, 11.). Hinsichtlich des VDP sind  $g_0 \in H^2(\Gamma)$ ,  $g_1 \in H^1(\Gamma)$  vorzusetzen (siehe Kapitel V, Satz 1).

2. Nach AGMON [5] gilt (2.31) auch noch für die Fälle, wo anstelle von  $\Omega$  nur  $\Gamma$  beschränkt ist (Außengebiete) oder  $\Omega$  außerhalb einer genügend großen Kugel zylindrisch ist (vergl. in [5] die Bemerkung nach Theorem 9.8).

Inwieweit die starke Glattheitsforderung an  $\Omega$  abgeschwächt werden kann, kann hier nicht abschließend geklärt werden. Der entsprechende Beweis von AGMON ([5], Theorem 9.8) läßt darauf schließen, daß (2.31) etwa für  $n = 2$  auch noch dann gültig bleibt, wenn - wie in Bemerkung 1 - die geforderte Glattheit nur stückweise gilt,  $\Omega$  nach wie vor auf einer Seite von  $\Gamma$  liegt und die Kegelbedingung erfüllt (dies schließt in den endlich vielen Ecken Nullwinkel aus). Für  $L = -\Delta$  wird dies durch Kapitel III, Satz 2 bestätigt. Für  $L = \Delta^2$  werden wir von dieser Aussage explizit für den Fall eines Quadrats Gebrauch machen. Hierbei sei jedoch betont, daß alle diesbezüglichen Ergebnisse numerisch bei geeigneter (fester) Diskretisierung erhalten wurden und deshalb auch auf ein Gebiet mit entsprechend abgerundeten Ecken bezogen werden können (vergl. Kapitel V, Abschnitt 3).

### 3. Hinreichende Bedingungen an $\Omega$ , $L$ und $B$

Mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 2 lassen sich nun hinreichende Bedingungen an  $\Omega$ ,  $L$  und  $B$  angeben, unter denen die Voraussetzungen aus Kapitel I für die dortigen Verfahren erfüllt sind. Hierzu gilt

#### Satz 3

Mit  $n, m \in \mathbb{N}$  seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

- (V1)  $\Omega$  ist eine beschränkte, offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  vom  $C^{2m}$ -Typ  
 (V2) Die Zusatzbedingung (1.6) aus Kapitel I habe lineare Randbedingungen zum Inhalt, welche die Funktion selbst oder irgendwelche Ableitungen höchstens der Ordnung  $m-1$  betreffen, die von einer Funktion  $w_M \in H^{2m}(\Omega)$  erfüllbar sind.

(V3) L ist ein linearer Differentialoperator der Ordnung  $2m$ , erklärt auf  $H^{2m}(\Omega)$  durch

$$(3.1) \quad \forall w \in H^{2m}(\Omega): Lw := \sum_{|\alpha|, |\beta|=0}^{2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta w)$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$(3.2) \quad a_{\alpha\beta} \in C_b^{|\alpha|}(\Omega) \quad \text{für } |\alpha|, |\beta| = O(1)m; \quad a_{\alpha\beta} \in C^m(\bar{\Omega}) \quad \text{für } |\alpha| = |\beta| = m$$

(3.3) L ist gleichmäßig streng elliptisch auf  $\Omega$  (vergl. (2.6))

$$(3.4) \quad \exists c_L > 0 \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega): |(u, Lu)_0| \geq c_L \|u\|_m^2$$

(V4) B ist ein bilinearer Differentialoperator, erklärt auf  $H^{2m}(\Omega) \times H^{2m}(\Omega)$  durch

$$(3.5) \quad \forall v, w \in H^{2m}(\Omega): B(v, w) := \sum_{|\alpha|, |\beta|=0}^{2m} b_{\alpha\beta} D^\alpha v D^\beta w$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$(3.6) \quad b_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega) \quad (|\alpha|, |\beta| = O(1)2m)$$

$$(3.7) \quad b_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{falls } |\alpha| + |\beta| \geq 4m - \frac{n}{2} \quad (|\alpha|, |\beta| = O(1)2m)$$

Dann gelten:

(B1) Mit  $X := H^{2m}(\Omega)$  und  $Y := L^2(\Omega)$  sind  $L: X \rightarrow Y$  und  $B: X \times X \rightarrow Y$  als lineare Abbildungen wohldefiniert und bezüglich der Normen in  $H^{2m}(\Omega)$  und  $L^2(\Omega)$  beschränkt.

(B2) Die Voraussetzungen I - IV aus Kapitel I sind erfüllt, wenn wir  $U := H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ ,  $M := W_M + U$  setzen und  $Y$  mit dem üblichen inneren Produkt aus  $L^2(\Omega)$  betrachten. Die durch  $L$  induzierte Norm  $\|\cdot\|_L$  (bzw. das innere Produkt  $(\cdot, \cdot)_L$ ) ist dabei auf  $U$  äquivalent zur Norm  $\|\cdot\|_{2m}$  (bzw. zum inneren Produkt  $(\cdot, \cdot)_{2m}$ ).

(B3) Für  $m+1 > \frac{n}{2}$  ist  $U \subset C^{m-1}(\bar{\Omega})$  und für jedes  $u \in U$  ist  $D^\alpha u|_\Gamma = 0$  für  $|\alpha| = O(1)m-1$ .

### Beweis

Zu (B1):

Die Wohldefiniertheit und Beschränktheit von  $L$  als linearer Differentialoperator von  $H^{2m}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  wurde bereits in Abschnitt 2 gezeigt (siehe S. 57).

Hinsichtlich der Behauptung für B genügt es zu zeigen, daß im Fall  $|\alpha| + |\beta| < 4m - \frac{n}{2} =: \eta$ ,  $|\alpha|, |\beta| \leq 2m$  folgendes gilt:

$$(3.8) \quad \exists K_{\alpha\beta}: \forall v, w \in H^{2m}(\Omega): \|D^{\alpha} v D^{\beta} w\|_{0,2} \leq K_{\alpha\beta} \|v\|_{2m,2} \|w\|_{2m,2},$$

denn dann folgt für alle  $v, w \in H^{2m}(\Omega)$ :

$$\|B(v, w)\|_0 \leq \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 2m} \|b_{\alpha\beta} D^{\alpha} v D^{\beta} w\|_{0,2}$$

$$(3.7) \quad \leq \sum_{\substack{|\alpha| + |\beta| < \eta \\ |\alpha|, |\beta| \leq 2m}} \|b_{\alpha\beta} D^{\alpha} v D^{\beta} w\|_{0,2}$$

$$(1.23) \quad \leq \sum_{|\alpha| + |\beta| < \eta} \|b_{\alpha\beta}\|_{0,\infty} \|D^{\alpha} v D^{\beta} w\|_{0,2}$$

$$(3.6) \quad |\alpha|, |\beta| \leq 2m$$

$$(3.8) \quad \leq \sum_{\substack{|\alpha| + |\beta| < \eta \\ |\alpha|, |\beta| \leq 2m}} \|b_{\alpha\beta}\|_{0,\infty} K_{\alpha\beta} \|v\|_{2m,2} \|w\|_{2m,2},$$

wonach  $B: H^{2m}(\Omega) \times H^{2m}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  abbildet und bezüglich der dort üblichen Normierung als bilinearer Operator beschränkt ist, indem

$$(3.9) \quad \|B\| \leq \sum_{|\alpha| + |\beta| < \eta} \|b_{\alpha\beta}\|_{0,\infty} K_{\alpha\beta}.$$

Zum Nachweis von (3.8) seien im folgenden  $v, w$  beliebige Funktionen aus  $H^{2m}(\Omega)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$  mit  $|\alpha|, |\beta| \leq 2m$  und  $|\alpha| + |\beta| < 4m - \frac{n}{2}$ .

Nach Einbettung (f), S. 54 gilt zunächst:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} D^{\alpha} v &\in H^{2m-|\alpha|}(\Omega) \quad \text{und} \quad \|D^{\alpha} v\|_{0,2} \leq \|D^{\alpha} v\|_{2m-|\alpha|,2} \leq \|v\|_{2m,2} \\ D^{\beta} w &\in H^{2m-|\beta|}(\Omega) \quad \text{und} \quad \|D^{\beta} w\|_{0,2} \leq \|D^{\beta} w\|_{2m-|\beta|,2} \leq \|w\|_{2m,2} \end{aligned}$$

Wir behandeln zunächst den Fall, wo einer der Multiindizes betragsmäßig unterhalb  $2m - \frac{n}{2}$  bleibt:

Ist etwa  $|\alpha| < 2m - \frac{n}{2}$ , so setzen wir in der Einbettung (i), S. 55,  $k := 2m - |\alpha|$  und  $p := 2$ . Wegen  $|\alpha| < 2m - \frac{n}{2}$  ist dann  $kp > n$  und somit  $D^{\alpha} u \in H^{2m-|\alpha|,2}(\Omega) = H^{k,p}(\Omega)$  auch Element von  $C_b(\Omega)$ . Mit der Konstanten  $K$  aus (1.30) folgt dann (3.8), indem:

$$\|D^{\alpha}vD^{\beta}w\|_{0,2} \stackrel{(1.23)}{\leq} \|D^{\alpha}v\|_{0,\infty} \|D^{\beta}w\|_{0,2} \stackrel{(1.30)}{\leq} K \|D^{\alpha}v\|_{2m-|\alpha|,2} \|D^{\beta}w\|_{0,2} \\ \stackrel{(3.10)}{\leq} K \|v\|_{2m,2} \|w\|_{2m,2}$$

Ist  $|\beta| = 2m$ , so folgt aus  $|\alpha| + |\beta| < 4m - \frac{n}{2}$ :  $|\alpha| < 2m - \frac{n}{2}$  und somit wieder (3.8).

Wegen der Symmetrie in den Bedingungen bezüglich  $\alpha$  und  $\beta$  können wir im folgenden also ohne Einschränkung annehmen, daß

$$(3.11) \quad 2m - \frac{n}{2} \leq |\alpha| \leq |\beta| < 2m.$$

In diesem Fall existieren  $s, t \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$  und von  $v, w$  unabhängige Konstanten  $K_s$  und  $K_t$ , so daß:

$$(3.12) \quad \|D^{\alpha}v\|_{0,2s} \leq K_s \|D^{\alpha}v\|_{2m-|\alpha|,2}; \quad \|D^{\beta}w\|_{0,2t} \leq K_t \|D^{\beta}w\|_{2m-|\beta|,2}$$

Ist  $|\beta| = 2m - \frac{n}{2}$  und damit auch  $|\alpha| = 2m - \frac{n}{2}$ , so folgt dies aus Einbettung (h) und (1.29), indem dort mit  $k := 2m - |\alpha|$ ,  $p := 2$  und  $q := 2s$  bzw. mit  $k := 2m - |\beta|$ ,  $p := 2$  und  $q := 2t$  jeweils die Voraussetzung (ii) zur Einbettung von  $D^{\alpha}v$  in  $L^{2s}(\Omega)$  bzw. von  $D^{\beta}w$  in  $L^{2t}(\Omega)$  erfüllt ist.  $s$  und  $t$  sind dabei im obigen Rahmen beliebig wählbar.

Ist  $|\beta| > 2m - \frac{n}{2}$ , so setze  $s := \frac{n}{2} \frac{1}{2m - |\beta|}$ ,  $t := \frac{s}{s-1}$ . Da zugleich  $|\beta| < 2m$ , ist  $s \in (1, \infty)$ ; ferner gilt:  $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$ . Bezüglich der Einbettung von  $D^{\beta}w$  in  $L^{2t}(\Omega)$  setzen wir wieder  $k := 2m - |\beta|$ ,  $p := 2$  und  $q := 2t$ . Wegen  $|\beta| > 2m - \frac{n}{2}$  ist nun  $kp < n$  und

$$\frac{pn}{n-kp} = \frac{2n}{n-2(2m-|\beta|)} = \frac{2s}{s-1} = 2t = q,$$

womit die Voraussetzung (i) zur Einbettung (h) erfüllt ist.

Hinsichtlich der gleichzeitigen Einbettung von  $D^{\alpha}v$  in  $L^{2s}(\Omega)$  vermerken wir zunächst, daß wegen  $|\beta| > 2m - \frac{n}{2}$  und  $|\alpha| + |\beta| < 4m - \frac{n}{2}$

$$(3.13) \quad |\alpha| < 2m - \frac{n}{2} + \frac{n}{2s}.$$

Ist nun  $|\alpha| = 2m - \frac{n}{2}$ , so gilt wieder die Einbettung von  $D^{\alpha}v$  in  $L^{2s}(\Omega)$  gemäß (h) wie oben nach Voraussetzung (ii) (oben war keine weitere Bedingung an  $s$  gestellt!).

Für den Fall  $|\alpha| > 2m - \frac{n}{2}$  läßt sich aber wiederum die Voraussetzung (i)

zur Einbettung (h) verifizieren, indem mit  $k := 2m - |\alpha|$ ,  $p := 2$  und  $q := 2s - kp < n$  und

$$\frac{pn}{n-kp} = \frac{2n}{n-4m+2|\alpha|} \stackrel{(3.13)}{\geq} \frac{2n}{n-4m+(4m-n+\frac{n}{s})} = 2s = q$$

Mit (3.12) folgt aber wieder:

$$\begin{aligned} \|D^\alpha_v D^\beta_w\|_{0,2} &\stackrel{(1.23)}{\leq} \|D^\alpha_v\|_{0,2s} \|D^\beta_w\|_{0,2t} \\ &\stackrel{(3.12)}{\leq} K_s K_t \|D^\alpha_v\|_{2m-|\alpha|,2} \|D^\beta_w\|_{2m-|\beta|,2} \\ &\stackrel{(3.10)}{\leq} K_s K_t \|v\|_{2m,2} \|w\|_{2m,2} \end{aligned}$$

Zu (B2):

Voraussetzung I ist erfüllt nach Konstruktion (siehe (V2) und Definition von M).

Nach (B1) wissen wir bereits, daß  $L: X \rightarrow Y$  bezüglich der dort üblichen Normen  $\|\cdot\|_{2m}$  und  $\|\cdot\|_0$  koniar und ferner  $B: X \times X \rightarrow Y$  beschränkt ist, so daß

$$(3.14) \quad \exists K: \forall w \in X, u \in U: \|B(w, u)\|_0 \leq K \|w\|_{2m} \|u\|_{2m}$$

Nach Lemma 1 aus Kapitel I genügt es damit zu zeigen, daß  $A = L|_U$  bezüglich der Normen  $\|\cdot\|_{2m}$  in  $U$  und  $\|\cdot\|_0$  in  $Y$  eine koniare Inverse besitzt.

Mit (3.2) und (3.4) ist nach Satz 1 das hVDP zu  $L$  und vorgegebenem  $r \in L^2(\Omega)$  eindeutig lösbar.

Mit (V1), (3.2) und (3.3) liegt nach Satz 2 die Lösung nicht nur in  $H^m_0(\Omega)$ , sondern auch in  $H^{2m}(\Omega)$  und ist damit starke Lösung. Insgesamt gilt also:

$$(3.15) \quad \forall r \in Y \quad \exists v \in U: Lv = r$$

Damit ist aber  $A := L|_U: U \rightarrow Y$  bijektiv.

Wir setzen  $T := A^{-1}$ , so daß

$$\forall r \in Y: Tr = v \Leftrightarrow Av = r \quad \text{bzw.} \quad \forall u \in C^\infty_0(\Omega): d(u, v) = (u, r)_0$$

$T$  ist also gleich der Abbildung aus Satz 1.b.

Nach Satz 1.b und Satz 2.b gelten

$$\forall r \in Y: \|Tr\|_0 \leq \frac{1}{c_L} \|r\|_0 \quad \text{mit } c_L \text{ aus (3.4)}$$

$$\forall r \in Y: \|Tr\|_{2m} \leq C(\|r\|_0 + \|Tr\|_0) \quad \text{mit } C \text{ aus (2.31)},$$

womit aber

$$(3.16) \quad \forall r \in Y: \|Tr\|_{2m} \leq C(1 + \frac{1}{c_L}) \|r\|_0$$

und  $A^{-1}$  als Abbildung von  $Y$  in  $U$  beschränkt ist.

### Zu (B3):

Wegen (V1) erfüllt  $\Omega$  speziell die Kegelbedingung. Nach Satz 2.a ist damit im Fall  $2(m+1) > n$   $U \subset C^{m-1}(\bar{\Omega})$ ; da  $\Omega$  speziell vom  $C^m$ -Typ ist, ist für jedes  $u \in U$  und für jedes  $x \in \Gamma$   $D^\alpha u(x) = 0$ ,  $|\alpha| = O(1)m-1$ . ▲

### Bemerkungen

1. Die starke Voraussetzung (V1) bezüglich  $\Omega$  sichert, daß die Injektion  $T$  in  $U$  abbildet und beschränkt ist. Ferner folgt mit ihr das Verschwinden der ersten  $m-1$  Ableitungen von  $u \in U$  auf dem Rand im klassischen Sinne. Für die restlichen Aussagen mußte lediglich die Kegelbedingung vorausgesetzt werden.

Die Beschränktheits- und Glattheitsforderungen können im Rahmen von Bemerkung 2 zu Satz 2 (vergl. S.66) abgeschwächt werden, solange die Beziehung (3.4) Gültigkeit besitzt. Letzteres ist zum Beispiel für  $L := (-1)^m \Delta^m$  noch der Fall, wenn  $\Omega$  von beschränkter Breite ist.

2. Mit (B3) nimmt jede Funktion aus  $M$  auf dem Rand (im klassischen Sinne) die gleichen Werte wie  $w_M$  an. Gleiches gilt für alle Ableitungen bis zur Ordnung  $m-1$ . Damit erfüllen aber alle Funktionen aus  $M$  nach (V2) die geforderten Randbedingungen. Hierbei sind auch nicht-lineare Randbedingungen denkbar!

Die mit den Methoden aus Kapitel I gewonnene Eindeutigkeitsaussage bezieht sich dabei auf  $M$ . Erfüllt etwa  $\tilde{w} \in X$  ebenfalls die geforderten Randbedingungen und gilt  $L\tilde{w} = Lw_M = r$ , ohne daß  $\tilde{w} = w_M$ , so erhält man durch Betrachtung der Aufgabe auf  $\tilde{M} := \tilde{w} + U$  in der Regel auch eine andere Lösung des Problems in  $X$ . Sind die geforderten Randbedingungen jedoch die Dirichletschen, so bezieht sich gerade die Eindeutigkeit auch auf  $X$ , da hierfür die Randwertaufgabe mit  $Lw = r$  eindeutig lösbar auf  $H^{2m}(\Omega)$  ist.

Wegen  $U \subset H_0^m(\Omega)$  gelten diese Aussagen im verallgemeinerten Sinne auch ohne (B3) und die damit voraussetzende Glattheit des Randes. Alle Funktionen aus  $M$  haben dann ein "ähnliches" Randverhalten aufzuweisen, wobei dann diese Ähnlichkeit zufriedenstellen muß. Die Gültigkeit von (B3) ist natürlich für die Praxis weit angenehmer.

3. Eine ähnliche, allerdings schwächere Aussage hinsichtlich der Beschränktheit von  $B$  erhalten wir auch aus der Einbettung (k), S. 55, unter der Bedingung

$$(3.17) \quad 4m > n \quad \text{und} \quad b_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{für} \quad |\alpha| + |\beta| > 2m.$$

Man sieht unmittelbar, daß (3.17) echt einschränkender ist als (3.7) ( $4m > n \wedge |\alpha| + |\beta| \leq 2m \Rightarrow |\alpha| + |\beta| < 4m - \frac{n}{2}$ ; für  $n=m=2$ ,  $|\alpha| = |\beta| = 3$  ist  $|\alpha| + |\beta| > 2m$ , aber  $< 4m - \frac{n}{2}$ ).

Mit (3.7) sind die Einbettungssätze für  $p = 2$  soweit möglich ausgeschöpft worden. Da weiterführende Einbettungsaussagen der benötigten Form im allgemeinen nicht gelten (vergl. ADAMS [3] 5.24 - 5.29) und die Ungleichung (1.23) scharf ist, ist die Beschränktheit von  $B$  über den durch (3.7) gesteckten Rahmen hinaus nicht zu erwarten.

4. Da nach den Voraussetzungen des Satzes die GU erfüllt und  $\Omega$  beschränkt ist, gilt nach Bemerkung 2 zu Satz 1 die Fredholm'sche Alternative, wobei die Existenz einer eindeutigen Lösung des hVDP zu beliebigem  $v \in L^2(\Omega)$  gerade gegeben ist, wenn  $\lambda = 0$  kein Eigenwert von  $L$  ist (denn dann ist  $\frac{1}{k}$  kein Eigenwert von  $T_k$ ; vergl. Bemerkung 2, S. 62). Es genügt deshalb, anstelle von (3.4) zu fordern

$$(3.18) \quad \exists c_L > 0: \forall u \in C_0^\infty(\Omega): |(u, Lu)_0| \geq c_L \|u\|_0^2,$$

da dies zugleich die zur Beschränktheit der Inversen benutzte Abschätzung  $\|Tr\|_0 \leq \frac{1}{c_L} \|r\|_0$  sichert.

5. Das Ergebnis von Satz 3 beruht im wesentlichen darauf, daß der Bilinearteil dem Linearteil in gewisser Weise untergeordnet ist. Dies kann auch für andere Nichtlinearitäten gelten. Voraussetzung ist, daß deren Wachstum unterhalb einer gewissen Grenze liegt, die wiederum von  $n, m$  und der Höhe der enthaltenen Ableitungen abhängt.

Ferner ist eine Ausweitung auf Systeme möglich. Bezüglich dieser Verallgemeinerungen verweisen wir auf eine Arbeit von VON WAHL [57]. Dort wird allerdings im Unterschied zu hier vorausgesetzt, daß die Nichtlinearität höchstens Ableitungen der Ordnung  $m$  (d.h. der halben Ordnung von  $L$ ) enthält; ferner muß sie neben der Wachstumsbeschränkung gewisse Stetigkeits- und Monotonievoraussetzungen erfüllen. Immerhin werden in [57] Aussagen über die Regularität von schwachen Lösungen der NSG gewonnen, indem die genannten Voraussetzungen für das System mit  $m=1$  bei homogenen Randbedingungen erfüllbar sind.

# K A P I T E L III

## Explizite Bestimmung von Einbettungskonstanten

Hinsichtlich praktischer Anwendungen interessiert insbesondere der Fall quasilinearer elliptischer Randwertprobleme, wo  $L = (-1)^m \Delta^m$  mit  $m=1$  und  $m=2$  (vergl. Kapitel II, S. 63). Nach Kapitel II ist unter genügenden Glattheitsbedingungen an das betrachtete Gebiet  $\Omega$  und unter gewissen Voraussetzungen an den bilinearen Differentialoperator  $B$  die Existenz der Konstanten  $\beta$  und  $\gamma$  zur Normabschätzung von Bilinearteil durch Linearteil gemäß den Voraussetzungen IV.b und IV.c gegeben (vergl. Kapitel II, Satz 3). Wie bereits der Beweis von Satz 3 aus Kapitel II zeigt, läuft die Bestimmung von  $\beta$  und  $\gamma$  auf eine Berechnung der Konstanten in den Einbettungen (h) und (i) hinaus.

Diese Einbettungen gelten auch für unbeschränkte Gebiete, wobei entsprechende Einbettungskonstanten für  $\Omega = \mathbb{R}^n$  z.B. in der Arbeit von TALENTI [53] bestimmt werden. Die von uns zu stellenden Bedingungen, etwa daß  $\Omega$  von beschränkter Breite ist, hängen damit zusammen, daß wir die eindeutige Lösbarkeit des hVDP benötigen und mit  $|\Delta^m u|_{0,2}$  anstelle von  $\|u\|_{2m,2}$  abschätzen möchten. Schon allein aus diesem Grunde sind die hier betrachteten Gebiete in irgendeiner Form berandet, was gegenüber dem Fall  $\Omega = \mathbb{R}^n$  bei der Konstantenbestimmung einige Schwierigkeiten bereitet. Von unserer Problemstellung her können wir allerdings voraussetzen, daß die relevanten Funktionen die homogenen Dirichletschen Randbedingungen (im verallgemeinerten Sinne) erfüllen. Hierbei sind zwei Arten von Einbettungskonstanten von besonderem Interesse; mit der einen werden die  $L^2$ -Normen und mit der anderen die  $L^\infty$ -Normen der Ableitungen durch die induzierte Norm (vergl. Kapitel I, S. 8) abgeschätzt. Hierzu bezeichne  $C_k(m, \Omega)$  bzw.  $D_k(m, \Omega)$  die von  $k, m, \Omega$  (und  $n$ ) abhängige kleinstmögliche Konstante mit

$$\forall u \in H_0^{m,2}(\Omega) \cap H^{2m,2}(\Omega): |u|_{k,2} \leq C_k(m, \Omega) |\Delta^m u|_{0,2} \quad \text{bzw.}$$

$$|u|_{k,\infty} \leq D_k(m, \Omega) |\Delta^m u|_{0,2}.$$

Unter genügenden Glattheitsbedingungen an  $\Omega$  existiert  $C_k(m, \Omega)$  für  $k = O(1)2m$  und  $D_k(m, \Omega)$  für  $k < 2m - \frac{n}{2}$ . ( $n$  bezeichnet hier wie in Kapitel II die Raumdimension; die Abhängigkeit der Konstanten von  $n$  wird durch die Abhängigkeit von  $\Omega$  implizit zum Ausdruck gebracht.)

Für den eindimensionalen Fall  $\Omega := (0, a)$  ( $a > 0$ ) findet man mit Hilfe des Satzes von Rolle und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung die Abschätzung  $C_k(m, \Omega) \leq a^{2m-k}$ ,  $k = O(1)2m$ . Die gleichen Hilfsmittel liefern obere Schranken von  $D_k(m, \Omega)$  für  $k = O(1)2m-1$ . Allerdings sind diese Abschätzungen recht grob und in ihrer Art nicht auf den mehrdimensionalen Fall übertragbar. Bessere, zum Teil optimale Resultate erhält man mit Hilfe von Eigenwertabschätzungen, die sich auch für den mehrdimensionalen Fall eignen.

Abschnitt 1 befaßt sich mit der Bestimmung von  $C_k(m, \Omega)$  für  $k = O(1)m$ . Hierzu sind keine besonderen Bedingungen an  $m, \Omega$  und  $n$  gestellt. Erforderlich ist lediglich die Kenntnis einer positiven unteren Schranke für den kleinsten Eigenwert des DP zu  $L := -\Delta$ . Einige der gewonnenen Abschätzungen - hauptsächlich die für  $k = 0$  - sind bereits in der Literatur bekannt (vergl. LADYSHENSKAJA [30], PAYNE-WEINBERGER [42], SIGILLITO [47]).

Die Abschätzung von  $C_k(m, \Omega)$  für  $k = m+1(1)2m$  ist Gegenstand von Abschnitt 2, wobei wir uns auf die Fälle  $n = 1, 2$  beschränken. Die nach Kapitel II zunächst zu stellende Glattheitsforderung ( $\Omega$  vom  $C^{2m}$ -Typ) kann in gewissen Fällen abgeschwächt werden. Im übrigen stellt die Bestimmung einer oberen Schranke von  $C_k(m, \Omega)$  für  $k > m$  in jedem Einzelfall ein besonderes Problem dar. Im Hinblick auf die Anwendungsbeispiele konzentrieren wir uns hauptsächlich auf  $C_3(2, \Omega)$  für Kreis und Quadrat.

Hinsichtlich der Konstanten  $D_k(m, \Omega)$  spielen die Konstante aus der Einbettung (i), S. 55, und  $D_0(1, \Omega)$  eine zentrale Rolle. In Abschnitt 3 werden obere und auch untere Schranken zu diesen Konstanten bestimmt; die Ergebnisse hinsichtlich  $D_0(1, \Omega)$  konzentrieren sich dabei hauptsächlich wieder auf den zweidimensionalen Fall.

Die wichtigsten Abschätzungen dieses Kapitels sind im Anhang I tabellarisch zusammengefaßt.

### 1. Abschätzung von $|u|_{k,2}$ durch $|\Delta^m u|_{0,2}$ für $k \leq m$

Wie in Kapitel II seien  $n, m \in \mathbb{N}$  und  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Ergänzend zu den Definitionen aus Kapitel II, Abschnitt 1 führen wir folgende Bezeichnungen für Vektorfelder ein:

Wir sagen  $\mathbf{b}$  ist aus  $L^2(\Omega)$ , wenn  $\mathbf{b} = (v_1, \dots, v_n)$  mit  $v_i \in L^2(\Omega)$ ,  $i = 1(1)n$ . Entsprechend seien für  $k \in \mathbb{N}$  die Räume  $\mathfrak{H}_{(0)}^{k,2}(\Omega)$  definiert und:

$$(1.1) \quad \forall u \in \mathfrak{H}^{k,2}(\Omega), v \in \mathfrak{H}^{k,2}(\Omega): (u, v)_k := \sum_{i=1}^n (u, v_i)_k$$

$$(1.2) \quad \forall u \in \mathfrak{H}^{k,2}(\Omega), v \in \mathfrak{H}^{k,2}(\Omega): (u, v)_k := \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)_k$$

$$(1.3) \quad \forall v \in \mathfrak{H}^{k,2}(\Omega): \|v\|_{k,2} := (v, v)_k^{1/2}$$

$$(1.4) \quad \forall u \in \mathfrak{H}^{1,2}(\Omega): \nabla u := \text{grad } u := (D_1 u, \dots, D_n u)$$

$$(1.5) \quad \forall v \in \mathfrak{H}^{1,2}(\Omega): \nabla v := \text{div } v := \sum_{i=1}^n D_i v_i$$

$$(1.6) \quad \forall v \in \mathfrak{H}^{1,2}(\Omega): \Delta v := (\Delta v_1, \dots, \Delta v_n)$$

### Bemerkungen

1. Mit dem inneren Produkt aus (1.2) ist  $\mathfrak{H}_{(0)}^{k,2}(\Omega)$  wie  $H_{(0)}^{k,2}(\Omega)$  ein Hilbertraum.

2. Setzen wir für  $u \in \mathfrak{H}^k(\Omega): \nabla^k u := \nabla(\nabla^{k-1} u)$ ,  $\nabla^0 u := u$  (analog sei  $\Delta^1$  für  $l \in \mathbb{N}_0$  definiert), so können wir mit den Potenzen von  $\nabla$  uneingeschränkt formal rechnen, indem für geeignetes  $u$  und  $k, l \in \mathbb{N}_0$ :

$$(1.7) \quad \nabla^k(\nabla^l u) = \nabla^l(\nabla^k u) = \nabla^{k+l} u; \quad \nabla^{2k} u = \Delta^k u; \quad \nabla^{2k+1} u = \nabla(\Delta^k u).$$

3. Mit (1.1) und (1.2) sind für  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \mathfrak{H}^{k,2}(\Omega)$  und  $v \in \mathfrak{H}^{l,2}(\Omega)$  auch  $(\nabla^k u, \nabla^l v)_0$  und  $\|\nabla^k u\|_{0,2} = |\nabla^k u|_{0,2}$  wohlgeklärt, wobei

$$(1.8) \quad \exists K \forall u \in \mathfrak{H}^{k,2}(\Omega): |\nabla^k u|_{0,2} \leq K |u|_{k,2}$$

Für  $k = 0, 1$  gilt dabei Gleichheit mit  $K := 1$ . Für  $k \geq 2$  gilt eine umgekehrte Abschätzung im allgemeinen nicht (für  $u(x) := x_1 \cdot x_2$  ist z.B.  $|\nabla^2 u|_{0,2} = 0$ , aber  $|u|_{2,2} = \sqrt{2 \text{vol}(\Omega)}$ ).

4. Für (1.2), (1.3) gilt wieder die Schwarzzsche Ungleichung (SU; vergl. Kapitel II, S. 53). Für die Form (1.1) folgt für  $u \in L^2(\Omega)$ ,  $v \in L^2(\Omega)$ :

$$(1.9) \quad |(u, v)_0| \leq \|u\|_{0,2} \sum_{i=1}^n \|v_i\|_{0,2} \leq \sqrt{n} \|u\|_{0,2} \|v\|_{0,2}$$

### Lemma 1

Mit  $k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}$  gilt

$$(1.10) \quad \forall u \in H^{k+1,2}(\Omega), v \in H_0^{1,2}(\Omega): (\nabla^k u, \nabla^l v)_0 = - (\nabla^{k+1} u, \nabla^{l-1} v)_0$$

### Beweis

Nach (1.9) bzw. der SU in  $L^2(\Omega)$  bzw.  $L^2(\Omega)$  sind beide Seiten von (1.10) stetige Funktionen von  $H^{k+1,2}(\Omega) \times H_0^{1,2}(\Omega)$  in  $\mathbb{K}$ . Da  $C^{k+1}(\Omega)$  in  $H^{k+1,2}(\Omega)$  und  $C_0^\infty(\Omega)$  in  $H_0^{1,2}(\Omega)$  dicht liegen, können wir nach dem Stetigkeitslemma (vergl. Lemma 1, Kapitel II) o.E. annehmen, daß  $u \in C^{k+1}(\Omega)$  und  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ . Da  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  einen kompakten Träger in  $\Omega$  besitzt, existiert ein Gebiet  $\Omega_0$  mit glattem Rand  $\Gamma_0$ , so daß  $\Omega_0 \subset \Omega$  und  $v$  mit samt seinen Ableitungen auf  $\Gamma_0$  und auch sonst außerhalb von  $\Omega_0$  verschwindet; es folgt dann

$$(1.11) \quad D^\alpha v|_{\Gamma_0} = 0 \quad \text{für alle } \alpha \text{ und}$$

$$\int_{\Omega} D^\alpha u \overline{D^\beta v} \, dx = \int_{\Omega_0} D^\alpha u \overline{D^\beta v} \, dx \quad \text{für } |\alpha| \leq k+1.$$

Auf  $\Omega_0$  gilt der Gauß'sche Integralsatz

$$(1.12) \quad \int_{\Omega_0} \nabla \cdot \vec{f} \, dx = - \int_{\Gamma_0} \vec{f} \cdot \vec{n} \, ds$$

wobei  $\vec{f}$  ein Vektorfeld mit Komponenten aus  $C^1(\overline{\Omega_0})$  ist. In dieser Form gilt (1.12) zunächst für  $n=2$  und  $n=3$ , wobei  $\vec{n}$  der Normalenvektor und  $ds$  das Linien- bzw. das Oberflächenelement darstellen (vergl. z.B. MANGOLDT-KNOPP [34] Bd. III Nr. 99 und Nr. 128). Für  $n=1$  steht gemäß dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf der rechten Seite von (1.12) anstelle des Randintegrals die Differenz der Randwerte. Für  $n>4$  erhält man eine entsprechende Formel aus dem allgemeinen Stokes'schen Satz.

Es seien  $a, b \in C^1(\overline{\Omega_0})$ ,  $c \in C^2(\overline{\Omega_0})$ . Definieren wir  $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$  durch  $f_i := ab$  bzw.  $f_i := aD_i c$ , so erhalten wir aus (1.12):

$$(1.13) \quad (a, \nabla b)_0 = -(\nabla a, b)_0, \quad \text{falls } a \text{ oder } b \text{ auf } \Gamma_0 \text{ verschwinden}$$

$$(1.14) \quad (\nabla a, \nabla c)_0 = -(\nabla a, \Delta c)_0, \quad \text{falls } a \text{ oder } \nabla c \text{ auf } \Gamma_0 \text{ verschwinden}$$

Das innere Produkt ist dabei auf  $\Omega_0$  zu beziehen.

Je nach dem, ob nun  $k$  bzw.  $l$  gerade oder ungerade sind, ergibt sich aus diesen Beziehungen für die oben betrachteten Funktionen  $u, v$ :

$$k = 2\mu, \quad l = 2\nu:$$

Wir setzen  $a := \Delta^\mu u = \nabla^k u$  und  $c := \Delta^{\nu-1} v = \nabla^{l-2} v$ , womit gemäß den Annahmen über  $u$  und  $v$   $a \in C^1(\bar{\Omega}_0)$ ,  $c \in C^\infty(\bar{\Omega}_0)$ ,  $\nabla c = 0$  auf  $\Gamma_0$  und

$$(\nabla^k u, \nabla^l v)_0 = (a, \Delta c)_0 = -(\nabla a, \nabla c)_0 = -(\nabla(\nabla^k u), \nabla(\nabla^{l-2} v))_0 = -(\nabla^{k+1} u, \nabla^{l-1} v)_0. \quad (1.14)$$

$$k = 2\mu+1, \quad l = 2\nu:$$

Wir setzen  $a := \nabla^{k-1} u = \Delta^\mu u$  und  $c := \nabla^{l-2} v = \Delta^{\nu-1} v$ , womit  $D_i a \in D^1(\bar{\Omega}_0)$ ,  $c \in C^\infty(\bar{\Omega}_0)$  und  $c = \nabla c = 0$  auf  $\Gamma_0$ , so daß

$$\begin{aligned} (\nabla^k u, \nabla^l v)_0 &= (\nabla a, \Delta c)_0 = \sum_{i=1}^n (D_i a, \Delta c)_0 \stackrel{(1.14)}{=} - \sum_{i=1}^n (\nabla D_i a, \nabla c)_0 \stackrel{(1.14)}{=} \sum_{i=1}^n (\Delta D_i a, c)_0 \\ &= \sum_{i=1}^n (D_i \Delta a, c)_0 = (\nabla(\Delta a), c)_0 \stackrel{(1.13)}{=} -(\Delta a, \nabla c)_0 = -(\nabla^{k+1} u, \nabla^{l-1} v)_0. \end{aligned}$$

$$k = 2\mu, \quad l = 2\nu-1:$$

Wir setzen  $a := \nabla^k u = \Delta^\mu u$  und  $b := \nabla^{l-1} v = \Delta^{\nu-1} v$ , womit  $a \in C^1(\bar{\Omega}_0)$ ,  $b \in C^\infty(\bar{\Omega}_0)$  und  $b = 0$  auf  $\Gamma_0$ , so daß

$$(\nabla^k u, \nabla^l v)_0 = (a, \nabla b)_0 \stackrel{(1.13)}{=} -(\nabla a, b)_0 = -(\nabla^{k+1} u, \nabla^{l-1} v)_0.$$

$$k = 2\mu+1, \quad l = 2\nu-1:$$

Wir setzen  $c := \nabla^{k-1} u = \Delta^\mu u$  und  $a := \nabla^{l-1} v = \Delta^{\nu-1} v$ , womit  $c \in C^2(\Omega_0)$ ,  $a \in C^\infty(\Omega_0)$  und  $a = 0$  auf  $\Gamma_0$ , so daß

$$(\nabla^k u, \nabla^l v)_0 = (\nabla c, \nabla a)_0 \stackrel{(1.14)}{=} -(\Delta c, a)_0 = -(\nabla^{k+1} u, \nabla^{l-1} v)_0. \quad \blacktriangle$$

### Lemma 2

Für  $k = O(1)m$  gilt:

$$(1.15) \quad \forall u \in H_0^{m,2}(\Omega): \quad |\nabla^k u|_{0,2} = |u|_{k,2}$$

Beweis durch vollst. Induktion über  $k$

$k = 0$ : trivial

$k \rightarrow k+1$ :

Nach Induktionsannahme genügt es zu zeigen:

$$|\nabla^{k+1} u|_{0,2}^2 = \sum_{i=1}^n |\nabla^k D_i u|_{0,2}^2 \quad (\text{denn für } u \in H_0^{k+1}(\Omega) \text{ ist } D_i u \in H_0^k(\Omega))$$

Falls  $k = 2\mu$  folgt dies wegen der Vertauschbarkeit von  $\Delta$  mit  $D_i$  aus:

$$\begin{aligned} |\nabla^{k+1} u|_{0,2}^2 &= (\nabla(\Delta^\mu u), \nabla(\Delta^\mu u))_0 = \sum_{i=1}^n (D_i(\Delta^\mu u), D_i(\Delta^\mu u))_0 \\ &= \sum_{i=1}^n (\Delta^\mu(D_i u), \Delta^\mu(D_i u))_0 = \sum_{i=1}^n (\nabla^k D_i u, \nabla^k D_i u)_0 = \sum_{i=1}^n |\nabla^k D_i u|_{0,2}^2 \end{aligned}$$

Falls  $k = 2\mu+1$ , gilt nach Lemma 1:

$$\begin{aligned} |\nabla^{k+1} u|_{0,2}^2 &= (\nabla^{k+1} u, \nabla^{k+1} u)_{0, L.1} = -(\nabla^{k+2} u, \nabla^k u)_0 = -(\nabla(\Delta^{\mu+1} u), \nabla(\Delta^\mu u))_0 \\ &= -\sum_{i=1}^n (D_i(\Delta^{\mu+1} u), D_i(\Delta^\mu u))_0 = -\sum_{i=1}^n (\Delta^{\mu+1} D_i u, \Delta^\mu D_i u)_0 \\ &= -\sum_{i=1}^n (\nabla^{k+1} D_i u, \nabla^{k-1} D_i u)_{0, L.1} = \sum_{i=1}^n (\nabla^k D_i u, \nabla^k D_i u)_0 = \sum_{i=1}^n |\nabla^k D_i u|_{0,2}^2 \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Hilfssätzen erhalten wir nun

### Satz 1

Es sei  $\Omega$  von beschränkter Breite  $\delta$  und  $\lambda_1 := \inf_{u \in H_0^m(\Omega)} \frac{(\nabla^m u, \nabla^m u)_0}{(u, u)_0}$ ;

dann ist  $\lambda_1 > 0$  und für  $k = O(1)m$  gilt:

$$(1.16) \quad \forall u \in H_0^{m,2}(\Omega) \cap H^{2m,2}(\Omega): |u|_{k,2} \leq C_k(m, \Omega) |\Delta^m u|_{0,2}$$

mit  $C_k(m, \Omega) \leq \lambda_1^{-\frac{2m-k}{2m}} \leq \delta^{2m-k}$

### Beweis:

Durch sukzessive Anwendung von Lemma 1 erhalten wir für  $u \in H_0^{m,2}(\Omega) \cap H^{2m,2}(\Omega)$  und  $k = O(1)m$ :

$$(1.17) \quad (-1)^m (u, \Delta^m u)_0 = (-1)^{m+k} (\nabla^k u, \nabla^{2m-k} u)_0 = (\nabla^m u, \nabla^m u)_0$$

Insbesondere wird also durch  $d(u, v) := (\nabla^m u, \nabla^m v)_0$  eine DBF zu  $L := (-1)^m \Delta^m$  definiert. Für  $u \in H_0^{m,2}(\Omega)$  gilt

$$(1.18) \quad d(u, u) = |\nabla^m u|_{0,2}^2 \underset{L.2}{=} |u|_{m,2}^2 \underset{PU}{\geq} \delta^{-2m} |u|_{0,2}^2,$$

womit nach Definition von  $\lambda_1$

$$(1.19) \quad \lambda_1 \geq \delta^{-2m} \quad (\text{impliziert die zweite Abschätzung für } C_k(m, \Omega)).$$

Ferner erhält man aus (1.17) bei Anwendung der SU in  $L^2(\Omega)$  bzw.  $L^2(\Omega)$ :

$$(1.20)_k \quad \forall u \in H_0^{m,2}(\Omega) \cap H^{2m,2}(\Omega): |u|_{0,2}^2 \leq \lambda_1^{-1} |\nabla^k u|_{0,2} |\nabla^{2m-k} u|_{0,2}, \quad k = 0(1)m.$$

Zum Nachweis von (1.16) zeigen wir nun zunächst durch vollständige Induktion über  $k$  die weitere Hilfsformel

$$(1.21)_k \quad \forall u \in H_0^{m,2}(\Omega) \cap H^{2m,2}(\Omega): |\nabla^k u|_{0,2}^{k+1} \leq \lambda_1^{-1} |\Delta^m u|_{0,2} |\nabla^{k+1} u|_{0,2}^k, \quad k = 0(1)m.$$

$k = 0$ : (1.21)<sub>0</sub> folgt aus (1.20)<sub>0</sub>

$k-1 \rightarrow k$  ( $k = 1(1)m$ ):

$$\begin{aligned} |\nabla^k u|_{0,2}^2 &= (\nabla^k u, \nabla^k u)_0 \underset{L.1}{=} -(\nabla^{k-1} u, \nabla^{k+1} u)_0 \underset{SU}{\leq} |\nabla^{k-1} u|_{0,2} |\nabla^{k+1} u|_{0,2} \Rightarrow \\ |\nabla^k u|_{0,2}^{2k} &\leq |\nabla^{k-1} u|_{0,2}^k |\nabla^{k+1} u|_{0,2}^k \underset{(1.21)_{k-1}}{\leq} \lambda_1^{-1} |\Delta^m u|_{0,2} |\nabla^k u|_{0,2}^{k-1} |\nabla^{k+1} u|_{0,2}^k \end{aligned}$$

Nach Division durch  $|\nabla^k u|_{0,2}^{k-1}$  (o.E.  $\neq 0$ ) folgt (1.21)<sub>k</sub>.

Die Abschätzung (1.16) erhalten wir nun aus (1.21), indem wir von  $k := m$  ausgehend von  $k$  auf  $k-1$  schließen:

$k = m$ :

$$|u|_{m,2}^2 \underset{L.2}{=} |\nabla^m u|_{0,2}^2 \underset{(1.17)}{=} (-1)^m (u, \Delta^m u)_0 \underset{SU}{\leq} |u|_{0,2} |\Delta^m u|_{0,2} \underset{(1.20)_0}{\leq} \lambda_1^{-1} |\Delta^m u|_{0,2}^2$$

$\Rightarrow$  (1.16)<sub>m</sub> (d.h. (1.16) für  $k := m$ ).

$k \rightarrow k-1$  ( $k = 1(1)m$ ):

$$\begin{aligned} |u|_{k-1,2}^{2k} &\underset{L.2}{=} |\nabla^{k-1} u|_{0,2}^{2k} \underset{(1.21)_{k-1}}{\leq} \lambda_1^{-2} |\Delta^m u|_{0,2}^2 |\nabla^k u|_{0,2}^{2k-2} \underset{L.2}{=} \lambda_1^{-2} |\Delta^m u|_{0,2}^2 |u|_{k,2}^{2k-2} \\ &\underset{(1.16)_k}{\leq} \lambda_1^{-2} |\Delta^m u|_{0,2}^2 \left[ \lambda_1^{-\frac{2m-k}{2m}} |\Delta^m u|_{0,2} \right]^{2k-2} \\ &= \lambda_1^{-\frac{2m-k+1}{2m} 2k} |\Delta^m u|_{0,2}^{2k} \end{aligned}$$

Hieraus folgt (1.16)<sub>k-1</sub>, indem man auf beiden Seiten die 2k-te Wurzel zieht. ▲

### Bemerkungen

1. Ist  $\Omega$  beschränkt, so ist  $\lambda_1$  gerade der kleinste Eigenwert des DP zu  $L := (-1)^m \Delta^m$  (vergl. Kapitel II, Abschnitt 2).  $\lambda_1$  und damit auch  $C_k(m, \Omega)$  hängen gemäß der Bezeichnung von  $m$  und  $\Omega$  ab, wobei  $\lambda_1 = \lambda_1(m, \Omega)$  nur für gewisse Gebiete, niedrige Ordnung und Dimension ( $m = 1, 2$ ;  $n = 1, 2, 3$ ) analytisch bekannt ist. Hilfreich sind deshalb die folgenden Beziehungen

$$(1.22) \quad \Omega' \subset \Omega \Rightarrow \lambda_1(m, \Omega) \leq \lambda_1(m, \Omega')$$

$$(1.23) \quad \lambda_1(m, \Omega) \geq \lambda_1(m-1, \Omega) \lambda_1(1, \Omega) \quad (m \geq 2)$$

Diese ergeben sich im wesentlichen aus der Infimum-Eigenschaft von  $\lambda_1$  (vergl. z.B. COURANT [16]; weitere Abschätzungen dieser Art finden sich bei SIGILLITO [47] S. 16-18).

Da  $\lambda_1$  für  $m = 1, 2$  und  $\Omega := K_a$  (Kreisscheibe vom Radius  $a$ ) bekannt ist (s. Anhang I, Tabelle 2; SIGILLITO [47] (3.23) und (3.25)), lassen sich hiernach für jedes beschränkte Gebiet der Ebene obere und untere Schranken für den zugehörigen kleinsten Eigenwert angeben, wobei gemäß dem Zusammenhang mit  $C_k(m, \Omega)$  natürlich hauptsächlich eine untere Schranke interessiert. Je mehr das Gebiet der Kreisform gleicht, um so genauer ist natürlich die so gewonnene Schranke; in der Regel ist diese auch weit besser als die durch (1.19) gegebene.

Zur genaueren Einschließung von  $\lambda_1$  sind ferner numerische Verfahren bekannt (COLLATZ [14], [15]; TREFFTZ [56]; SIGILLITO [47]; TIMOSHENKO [55])

2. Neben (1.16) ergeben (1.20) und (1.21) zum Teil weitere interessante Abschätzungen. Für partikuläre Werte von  $k$  und  $m$  sind (1.16) - (1.21) in der einschlägigen Literatur bekannt (siehe LADYSHENSKAJA [30] S. 10 (?); SIGILLITO [47] (3.2), (3.5) und (3.13)).
3. (1.16), (1.20) und (1.21) sind optimal für  $k = 0$  und  $k = m$  (Gleichheit, wenn  $u$  Eigenfunktion zu  $\lambda_1$  ist!). Es ist also  $C_0(m, \Omega) = \lambda_1^{-1}$  und  $C_m(m, \Omega) = \lambda_1^{-2}$ . Für  $0 < k < m$  sind dagegen (geringfügige) Verbesserungen denkbar.

Als Beispiel betrachten wir den eindimensionalen Fall mit  $m := 2$  und  $\Omega := (0,1)$ . Hier ist  $\lambda_1 = \kappa^4$ , wobei  $\kappa$  die kleinste positive Wurzel von  $\cosh(\kappa) \cos(\kappa) = 1$  ist (vergl. COLLATZ [15]). (Normierte)

Eigenfunktion zu  $\lambda_1$  ist

$$u_1(x) := N \left\{ (ch-c) [\sinh(\kappa x) - \sin(\kappa x)] - (sh-s) [\cosh(\kappa x) - \cos(\kappa x)] \right\}$$

wobei  $ch := \cosh(\kappa)$ ,  $c := \cos(\kappa)$ ,  $sh := \sinh(\kappa)$ ,  $s := \sin(\kappa)$

$$\text{und } N := (sh-s)^{-\frac{1}{2}}.$$

Man erhält nach einiger Rechnung:

$$|u_1|_{0,2} = 1, \quad |u_1|_{2,2} = \kappa^2, \quad |u_1|_{4,2} = \kappa^4$$

$$|u_1|_{1,2} = \kappa \left( \frac{sh+s}{sh-s} + \frac{2}{\kappa} \frac{sh \cdot sc}{sh-s} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{wobei } \left( \frac{sh+s}{sh-s} + \frac{2}{\kappa} \frac{sh \cdot sc}{sh-s} \right)^{\frac{1}{2}} \doteq 0.978763$$

$$|u_1|_{3,2} = \kappa^3 \left( \frac{sh+s}{sh-s} + \frac{6}{\kappa} \frac{ch-c}{sh-s} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{wobei } \left( \frac{sh+s}{sh-s} + \frac{6}{\kappa} \frac{ch-c}{sh-s} \right)^{\frac{1}{2}} \doteq 1.487146.$$

Mit  $C_0 = \kappa^{-4}$ ,  $C_1 = \kappa^{-3}$ ,  $C_2 = \kappa^{-2}$  wird also die Abschätzung (1.16) bestätigt, wobei auch die Abschätzung mit  $C_1$  noch recht scharf ist.

Andererseits zeigt dieses Beispiel, daß die Abschätzung der Form wie in Satz 1 für  $k > m$  nicht gültig ist, denn  $|u_1|_{3,2}$  wird nicht durch  $\kappa^{-1} |u|_{4,2}$  abgeschätzt!

## 2. Abschätzung von $|u|_{k,2}$ durch $|\Delta^m u|_{0,2}$ für $k > m$

Da  $C_0^\infty(\Omega)$  für  $k > m$  bezüglich  $\|\cdot\|_{k,2}$  nicht mehr dicht in  $H_0^{m,2}(\Omega) \cap H^{2m,2}(\Omega)$  liegt, können zur Abschätzung von  $|u|_{k,2}$  durch  $|\Delta^m u|_{0,2}$  die durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes erzeugten Randintegrale nicht länger unberücksichtigt bleiben. Dies schlägt sich darin nieder, daß die Formel (1.10) für  $l > m$  unter der Voraussetzung  $v \in H_0^{m,2}(\Omega)$  (anstelle von  $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ ) im allgemeinen nicht gültig ist. Da wir uns nicht mehr auf Funktionen mit kompaktem Träger beschränken können, müssen wir voraussetzen, daß der Rand von  $\Omega$  genügend glatt ist; dies entspricht den Glattheitsforderungen aus Kapitel II. Als Konsequenz hiervon sind die betreffenden Abschätzungen für ein gewisses Gebiet nicht unmittelbar auf ein Teilgebiet übertragbar, wie dies für  $k \leq m$  der Fall ist. Ist etwa  $\Omega$  beschränkt und vom  $C^{2m}$ -Typ, so wissen wir allerdings nach Kapitel II, Satz 3, daß eine Abschätzung der gewünschten Form existiert. Unter Benutzung der Inversen  $A^{-1}$  von  $(-1)^m \Delta^m|_U$

$(U = H_0^{m,2}(\Omega) \cap H^{2m,2}(\Omega))$  ist diese äquivalent zu

$$(2.1) \quad \forall r \in L^2(\Omega): \quad |A^{-1}r|_{k,2} \leq C_k(m, \Omega) |r|_{0,2}$$

Beide Seiten von (2.1) sind stetige Funktionen von  $L^2(\Omega)$  in  $\mathbb{R}$ ; die linke Seite gerade wegen des Bestehens dieser Abschätzung. Einen numerischen Wert für  $C_k(m, \Omega)$  brauchen wir also nach dem Stetigkeitslemma nur auf einer dichten Teilmenge von  $L^2(\Omega)$  abzusichern. Wir können somit z.B. annehmen, daß  $r = \Delta^m u$  aus  $C_0^\infty(\Omega)$  oder eine Linearkombination mit Funktionen aus einem VONS zu  $L^2(\Omega)$  ist.

Diese Überlegungen sind allerdings nach oben an eine relative starke Glattheitsforderung des Randes geknüpft. Setzen wir lediglich voraus, daß  $\Omega$  beschränkt ist und die Kegelbedingung erfüllt, so ist für  $n \leq 3$  jedes Element  $u \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$  auch in  $C(\bar{\Omega})$  und verschwindet auf dem Rand (s. Satz 2.a und Bem. 3, S.51); ferner existiert eine Folge  $u_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$  mit  $\|u - u_n\|_{2,2} \rightarrow 0$ , wobei nach Konstruktion auch  $u_n|_\Gamma = 0$  (man vergl. hierzu die Beweise von Theorem 2.1 und des Korollars zu Theorem 1.13 bei AGMON [5]; man beachte, daß  $\Omega$  unter den obigen Voraussetzungen auch die Segment-Eigenschaft besitzt). Da  $|\cdot|_{k,2}$  für  $k \leq 2$  und  $|\Delta \cdot|_{0,2}$  stetige Funktionen auf  $H^{2,2}(\Omega)$  sind, können wir uns damit für den Fall  $m = 1$  nach dem Stetigkeitslemma auf Funktionen  $u$  aus  $C^\infty(\bar{\Omega})$  mit  $u|_\Gamma = 0$  beschränken. Für diesen Fall geht es lediglich auch nur noch darum, im Mehrdimensionalen  $|u|_{2,2}$  durch  $|\Delta u|_{0,2}$  abzuschätzen.

### Satz 2

Es sei  $n = 2$  oder  $n = 3$ ;  $\Omega$  erfülle die Kegelbedingung und sei durch endlich viele  $C^2$ -Kurven bzw.  $C^2$ -Flächen begrenzt; die zweiten Ableitungen der in den jeweiligen lokalen Parametern definierten Funktionen  $g_x$  seien in folgender Weise gleichmäßig beschränkt:

$$(2.2) \quad \exists K_g \quad \forall x \in \Gamma: \quad \|\Delta g_x\|_{0,\infty} \leq K_g \quad (\text{vergl. Definition (b), S. 50})$$

Dann gilt:

$$(2.3) \quad \forall u \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega): \quad |u|_{2,2} \leq C_2(1, \Omega) |\Delta u|_{0,2}$$

mit  $C_2(1, \Omega) \leq (1 + q_1^{-1} K_g)^{\frac{1}{2}}$ , wobei  $q_1 > 0$  die kleinste charakteristische Zahl  $q \in \mathbb{R}$  ist, für die

$$(2.4) \quad \Delta^2 u = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u = \Delta u - q \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad \text{mit } u \in C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$$

### Beweis

Nach den Vorüberlegungen auf S. 83 können wir ohne Einschränkung annehmen, daß  $u \in C^3(\bar{\Omega})$  und  $u|_{\Gamma} = 0$  ist. Für diesen Fall erhält man aus dem Gaußschen Integralsatz und einigen Zusatzüberlegungen:

$$(2.5) \quad |u|_{2,2}^2 = |\Delta u|_{0,2}^2 + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 \Delta g_x \, ds$$

Zum Beweis sei auf LADYSHENSKAJA [30] S. 14 und 15 verwiesen (die dort für den dreidimensionalen Fall gezeigte Beziehung (19) folgt für  $n = 2$  analog; das Randintegral ist entsprechend der endlich vielen  $C^2$ -Kurven bzw. -Flächen aufzuspalten).

Für konvexe Gebiete ist  $\Delta g_x \leq 0$  (vergl. [30]), so daß  $C_2(1, \Omega) \leq 1$ . Diese Abschätzung ist zugleich optimal, da für alle genügend glatten Funktionen mit  $u|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0$  das Randintegral verschwindet. Die Abschätzung für den allgemeinen Fall erhält man unmittelbar aus der folgenden von SIGILLITO [47] angegebenen Ungleichung:

$$(2.6) \quad \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 \, ds \leq q_1^{-1} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 \, dx \quad (\text{vergl. [47] (3.15) und (3.22)})$$

(Untere Schranken für  $q_1$  sind bei SIGILLITO angegeben - vergl. [47] (3.36) und (3.37)).

Für  $m \geq 2$  führt ein entsprechendes Vorgehen nicht zum Ziel. Hier nehmen wir gemäß der eingangs erwähnten Idee an, daß  $r = (-1)^m \Delta^m u$  nach einem VONS zu  $L^2(\Omega)$  entwickelt ist. Als VONS bietet sich die Menge der Eigenfunktionen  $\varphi_i$  zum DP mit  $L := -\Delta$  an. Denn diese sind noch am ehesten bekannt und erfüllen ferner für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$  die Orthogonalitätsbeziehung

$$(2.7) \quad (\nabla^k \varphi_i, \nabla^k \varphi_j)_0 = \lambda_i^k \delta_{ij} \quad (\lambda_i \text{ Eigenwert zu } \varphi_i; \delta_{ij} \text{ Kroneckersymbol})$$

Mit Lemma 1 zeigt man allgemein:  $(\nabla^{km} \varphi_i, \nabla^{km} \varphi_j)_0 = \lambda_i^k \delta_{ij}$ , wenn  $\varphi_i$ ,  $\lambda_i$  die Eigenfunktionen bzw. Eigenwerte zum DP für  $L := (-1)^m \Delta^m$  sind. (Man beachte, daß nach Kapitel II ohne Einschränkung von

$\lambda_{i+1} > \lambda_i > 0$  ausgegangen werden kann.) In der Tat gilt (2.7) mit den Eigenfunktionen und Eigenwerten zu  $m > 1$  nur für gewisse  $k$  (wurde für den Fall  $n = 1$ ,  $m = 2$  nachgeprüft).

Bei dem Ansatz

$$(2.8) \quad r = \Delta^m u = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \quad \text{mit } N \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}$$

gilt dann mit den Eigenschaften der  $\varphi_i$  ( $\Delta^k \varphi_i = (-1)^k \lambda_i^k \varphi_i$ ,  $\varphi_i|_{\Gamma} = 0$ ) :

$$(2.9) \quad u = u_o + b, \text{ wobei}$$

$$(2.10) \quad u_o := (-1)^m \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-m} \alpha_i \varphi_i \quad \text{und } b \text{ bestimmt ist durch}$$

$$(2.11) \quad \Delta^m b = 0 \quad \text{auf } \Omega$$

$$(2.12) \quad \frac{\partial^k b}{\partial \nu^k} = - \frac{\partial^k u_o}{\partial \nu^k} = (-1)^{m+1} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i^m} \alpha_i \frac{\partial^k \varphi_i}{\partial \nu^k} \quad \text{auf } \Gamma, \quad k = 0(1)m-1$$

Letztere Randbedingung folgt aus den homogenen Dirichletschen Randbedingungen für  $u$ . Die Existenz von  $b \in H^{2m,2}(\Omega)$  ist nach Kapitel II gesichert. Bei Kenntnis von  $b$  hat man eine Darstellung für  $u$  und kann daran gehen,  $|u|_{k,2}^2$  durch  $|\Delta^m u|_{o,2}^2$  abzuschätzen.

Für den Fall der NSG ist insbesondere die Abschätzung für  $k=3$  und  $m=2$  von Interesse. Hierzu gilt:

### Satz 3

Es sei  $\Omega$  beschränkt und vom  $C^4$ -Typ. Es existiere eine reelle Zahl  $C_{\Gamma} \geq 0$ , so daß für alle Ansätze der Form (2.8) zu  $m=2$

$$(2.13) \quad \left| \int_{\Gamma} \Delta b \frac{\partial \Delta b}{\partial \nu} ds \right| \leq C_{\Gamma} |\Delta^2 u|_{o,2}^2 \quad (u = u_o + b).$$

Dann gilt

$$(2.14) \quad \forall u \in H_o^{2,2}(\Omega) \cap H^{4,2}(\Omega): |u|_{3,2} \leq C_3(2, \Omega) |\Delta^2 u|_{o,2}$$

mit  $C_3(2, \Omega) \leq C_2(1, \Omega) [\lambda_1^{-1} + C_{\Gamma}]^{\frac{1}{2}}$ , wobei

$\lambda_1 > 0$  der kleinste Eigenwert des DP zu  $L := -\Delta$ .

### Beweis

Mit  $u \in H_o^{2,2}(\Omega) \cap H^{4,2}(\Omega)$  ist speziell  $D_1 u \in H_o^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$  für  $i=1(1)m$ , so daß mit der nach Satz 2 bekannten Konstanten  $C_2(1, \Omega)$ :

$$(2.15) \quad |u|_{3,2}^2 = \sum_{i=1}^n |D_i u|_{2,2}^2 \leq \sum_{i=1}^n C_2^2(1, \Omega) |\Delta(D_i u)|_{0,2}^2 = C_2^2(1, \Omega) |\nabla^3 u|_{0,2}^2$$

Es genügt also hiernach  $|\nabla^3 u|_{0,2}$  durch  $|\Delta^2 u|_{0,2}$  abzuschätzen.

Allgemein erhält man aus dem Gauß'schen Integralsatz für  $v, w \in C^4(\bar{\Omega})$  die Formel:

$$(2.16) \quad (\nabla^3 v, \nabla^3 w) = -(\Delta v, \Delta^2 w) + \int_{\Gamma} \Delta v \frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} ds$$

Für  $u = u_0 + b$  gemäß (2.8) - (2.12) verschwinden  $\Delta u_0$  auf  $\Gamma$  und  $\Delta^2 b$  auf  $\Omega$ . Damit ist aber diese Zerlegung von  $u$  in dem Sinne orthogonal, daß nach (2.17)  $(\nabla^3 u_0, \nabla^3 b)_0 = 0$  und damit nach den Eigenschaften des inneren Produkts in  $L^2(\Omega)$

$$(2.17) \quad |\nabla^3 u|_{0,2}^2 = |\nabla^3 u_0|_{0,2}^2 + |\nabla^3 b|_{0,2}^2, \text{ wobei}$$

$$(2.18) \quad |\nabla^3 b|_{0,2}^2 \stackrel{(2.16)}{=} \int_{\Gamma} \Delta b \frac{\partial \Delta b}{\partial \nu} ds \stackrel{(2.13)}{\leq} C_{\Gamma} |\Delta^2 u|_{0,2}^2 \quad \text{und}$$

$$(2.19) \quad |\nabla^3 u_0|_{0,2}^2 \stackrel{(2.10)}{=} \sum_{i,j=1}^N \lambda_i^{-4} \alpha_i \alpha_j (\nabla^3 \varphi_i, \nabla^3 \varphi_j)_0 \stackrel{(2.7)}{=} \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-1} \alpha_i^2 \leq \lambda_1^{-1} \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 = \lambda_1^{-1} |\Delta^2 u|_{0,2}^2.$$

Hieraus ergibt sich

$$(2.20) \quad |\nabla^3 u|_{0,2}^2 \leq [\lambda_1^{-1} + C_{\Gamma}] |\Delta^2 u|_{0,2}^2$$

und damit nach (2.15) die in (2.14) angegebene Abschätzung für  $C_3(2, \Omega)$ . ▲

### Bemerkung

In (2.19) besteht überall Gleichheit, wenn  $\Delta^2 u = \varphi_1$ . Damit folgt aber aus (2.17) und (2.20), daß die bestmögliche Konstante zur Abschätzung von  $|\nabla^3 u|_{0,2}$  durch  $|\Delta^2 u|_{0,2}$  zwischen  $\lambda_1^{-1/2}$  und  $[\lambda_1^{-1} + C_{\Gamma}]^{1/2}$  liegt. In den folgenden Beispielen ist  $C_{\Gamma}$  gegenüber  $\lambda_1^{-1}$  relativ klein, so daß hieraus eine gute Einschließung resultiert. Da für konvexe Gebiete des  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  nach Satz 2  $C_2(1, \Omega) = 1$  ist, verstehen wir in diesen Fällen einfachheitshalber unter  $C_3(2, \Omega)$  diejenige kleinste Konstante, über die sowohl  $|u|_{3,2}$  als auch  $|\nabla^3 u|_{0,2}$  abgeschätzt wird.

Als Restproblem bleibt die Abschätzung (2.13), wofür  $b$  in Abhängigkeit von  $u$  gemäß (2.11) - (2.12) bestimmt werden muß.

Wir orientieren uns zunächst am eindimensionalen Fall mit  $\Omega := (0,1)$ , wo  $\Delta u = u''$ ,  $\nabla^3 u = u'''$  und anstelle des Randintegrals für  $b$  der Ausdruck  $b''(1)b'''(1) - b''(0)b'''(0)$  abzuschätzen ist. Die Eigenwerte und zugehörigen normierten Eigenfunktionen zu  $L := -u''$  sind bekanntlich gegeben durch (vergl. [15] oder [17])

$$(2.21) \quad \lambda_j = (j\pi)^2, \quad \varphi_j(x) = \sqrt{2} \sin(j\pi x), \quad j \in \mathbb{N}, \quad x \in [0,1].$$

$$\text{Mit } u^{iv} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j \quad \text{wird } u_0 = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{-2} \alpha_j \varphi_j$$

und  $b$  ist das Polynom dritten Grades mit

$$\begin{aligned} b(0) &= 0 & b(1) &= 0 \\ b'(0) &= -\sqrt{2} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{-\frac{3}{2}} \alpha_j =: -s_1 & b'(1) &= -\sqrt{2} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{-\frac{3}{2}} (-1)^j \alpha_j =: -s_2. \end{aligned}$$

Über den Ansatz  $b(x) = \beta_3 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$  finden wir

$$\beta_3 = s_1 + s_2, \quad \beta_2 = -(2s_1 + s_2), \quad \beta_1 = s_1, \quad \beta_0 = 0 \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} b''(1)b'''(1) - b''(0)b'''(0) &= 36 \beta_3^2 = 36 \cdot 2 \left( \sum_{j=1}^N (\lambda_j^{-\frac{3}{2}} + (-1)^j \lambda_j^{-\frac{3}{2}}) \alpha_j \right)^2 \\ &\leq 36 \cdot 8 \left( \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{2j}^{-3} \right) \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \right) = C_{\Gamma} |u^{iv}|_{0,2}^2 \end{aligned}$$

$$\text{mit } C_{\Gamma} := 36 \cdot 8 \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{2j}^{-3} = 36 \cdot 8 \sum_{j=1}^{\infty} (2\pi j)^{-6} = \frac{36 \cdot 8}{2^6 \pi^6} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-6} = \frac{1}{210}$$

$$\left( \sum_{j=1}^{\infty} j^{-6} = \frac{32 \pi^6}{6! 42} \right); \quad \text{vergl. z.B. BRONSTEIN [11], S. 254}$$

Wir erhalten also hier die Einschließung

$$(2.22) \quad 0.3183 \div \frac{1}{\pi} \leq C_3(1, \Omega) \leq \sqrt{\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{210}} \doteq 0.32571.$$

Im zweidimensionalen läßt sich die Methode noch analytisch durchführen, wenn  $\Omega$  eine Kreisscheibe ist. Es sei o.E.  $\Omega$  das Innere des Einheitskreises  $K_1$  (siehe (2.37)).

Bei Einführung von Polarkoordinaten  $r \in [0,1]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  sind

$$(2.23) \quad x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

$$(2.24) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$(2.25) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$(2.26) \quad \int_{\Omega} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) r dr d\theta, \quad \int_{\Gamma} f(s) ds = \int_0^{2\pi} f(1, \theta) d\theta; f \in C(\bar{\Omega})$$

Die orthonormalen Eigenfunktionen des DP zu  $L := -\Delta$  lassen sich hier bei doppelter Indizierung angeben zu

$$(2.27) \quad \varphi_{kl}(r, \theta) := p_{kl} J_k(j_{kl} r) \cos(k\theta), \quad \psi_{kl} := p_{kl} J_k(j_{kl} r) \sin(k\theta),$$

wobei  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $J_k$  die  $k$ -te Besselfunktion 1. Art,  $j_{kl}$  die  $l$ -te positive Nullstelle von  $J_k$  (der Größe nach geordnet)

$$p_{0l} := \frac{1}{\sqrt{\pi} J'_0(j_{0l})} \quad \text{und} \quad p_{kl} := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{J'_k(j_{kl})} \quad \text{für } k, l \in \mathbb{N}$$

( $J'_k(j_{kl}) \neq 0$ , da  $j_{kl}$  einfache Nullstelle von  $J_k$  ist).

Eigenwert zu  $\varphi_{kl}$  und  $\psi_{kl}$  ist gerade  $j_{kl}^2$ .  $p_{kl}$  ist Normierungsfaktor und ergibt sich aus den bekannten Orthogonalitätsbeziehungen von  $\cos(k\theta)$  und  $\sin(k\theta)$  auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$  sowie aus

$$(2.28) \quad \int_0^1 J_k(j_{kl} r) J_k(j_{kp} r) r dr = \frac{1}{2} [J'_k(j_{kl})]^2 \delta_{lp} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0; l, p \in \mathbb{N}$$

Hinsichtlich dieser Angaben vergleiche man z.B. FRANK-MISES [24] Bd. I, S. 415, 587 u. 588 oder COURANT-HILBERT [17] Bd. I, S. 302 - 306.

Gemäß (2.8) machen wir den Ansatz

$$(2.29) \quad \Delta^2 u = \sum_{k=0}^N \sum_{l=1}^M \alpha_{kl} \varphi_{kl} + \beta_{kl} \psi_{kl}.$$

Hierbei ist eigentlich  $M$  in Abhängigkeit von  $k$  zu wählen. Wir können jedoch ohne Einschränkung für alle  $k$  den größten oberen Index annehmen; gegebenenfalls ist  $\alpha_{kl}$  oder  $\beta_{kl}$  gleich Null zu setzen. Für  $u_0$  erhalten wir dann:

$$(2.30) \quad u_0 = \sum_{k=0}^N \sum_{l=1}^M \frac{1}{j_{kl}} p_{kl} J_k(j_{kl} r) [\alpha_{kl} \cos(k\theta) + \beta_{kl} \sin(k\theta)] \quad \text{und}$$

$$(2.31) \quad \frac{\partial u_0}{\partial v} = \frac{\partial u_0}{\partial r} = \sum_{k=0}^N \sum_{l=1}^M \frac{1}{j_{kl}} p_{kl} J'_k(j_{kl} r) [\alpha_{kl} \cos(k\theta) + \beta_{kl} \sin(k\theta)]$$

Auf dem Rand  $r = 1$  verschwindet  $u_o$  und nach Definition von  $p_{kl}$  gilt für die Normalenableitung

$$(2.32) \quad \left. \frac{\partial u_o}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{l=1}^N \frac{1}{j_{0l}^3} \alpha_{0l} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M \frac{1}{j_{kl}^3} [\alpha_{kl} \cos(k\theta) + \beta_{kl} \sin(k\theta)]$$

Als biharmonische Funktion auf  $\Omega$  ist  $b$  bestimmt durch  $b = (1-r^2)h+k$  mit harmonischen Funktionen  $h$  und  $k$  (vergl. [24] Bd. I, S. 849). Aus  $b|_{\Gamma} = -u_o|_{\Gamma} = 0$  folgt  $k|_{\Gamma} = 0$ , womit aber  $k$  als harmonische Funktion auf  $\Omega$  verschwindet. In unserem Fall ist also

$$(2.33) \quad b = (1-r^2)h \quad \text{mit} \quad \Delta h = 0 \quad \text{und} \quad h|_{\Gamma} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial u_o}{\partial \nu} \right|_{\Gamma}.$$

Die Randbedingung für  $h$  folgt dabei aus der entsprechenden für

$b \left( \left. \frac{\partial b}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = - \left. \frac{\partial u_o}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} \right)$ .  $h$  ist dadurch eindeutig bestimmt und läßt sich nach den Funktionen  $r^k \cos(k\theta)$ ,  $r^k \sin(k\theta)$  entwickeln (vergl. [24] Bd. I, S. 690). Durch Koeffizientenvergleich für  $r = 1$  erhalten wir aus (2.32)

$$(2.34) \quad h = \sum_{k=0}^N r^k (\gamma_k \cos k\theta + \delta_k \sin k\theta) \quad \text{mit} \quad \gamma_0 := \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{l=1}^M \frac{\alpha_{0l}}{j_{0l}^3},$$

$$\gamma_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{l=1}^M \frac{\alpha_{kl}}{j_{kl}^3}, \quad \delta_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{l=1}^M \frac{\beta_{kl}}{j_{kl}^3} \quad \text{für} \quad k = 1(1)N.$$

Wir haben damit  $b$  bestimmt. Zur Berechnung der Randwerte von  $\Delta b$  und

$\frac{\partial \Delta b}{\partial r}$  gilt:

$$\Delta b = -4(h+r \frac{\partial h}{\partial r}), \quad \frac{\partial \Delta b}{\partial r} = -4 \left( 2 \frac{\partial h}{\partial r} + r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} \right)$$

$$h|_{\Gamma} = \gamma_0 + \sum_{k=1}^N [\gamma_k \cos(k\theta) + \delta_k \sin(k\theta)], \quad \left. \frac{\partial h}{\partial r} \right|_{\Gamma} = \sum_{k=1}^N k [\gamma_k \cos(k\theta) + \delta_k \sin(k\theta)]$$

$$\left. \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} \right|_{\Gamma} = \sum_{k=1}^N k(k-1) [\gamma_k \cos(k\theta) + \delta_k \sin(k\theta)], \quad \text{womit}$$

$$\Delta b|_{\Gamma} = -4 \left( \gamma_0 + \sum_{k=1}^N (k+1) [\gamma_k \cos(k\theta) + \delta_k \sin(k\theta)] \right),$$

$$\left. \frac{\partial \Delta b}{\partial r} \right|_{\Gamma} = -4 \sum_{k=1}^N k(k+1) [\gamma_k \cos(k\theta) + \delta_k \sin(k\theta)].$$

Aus den Orthogonalitätsbeziehungen für  $\cos$  und  $\sin$  erhalten wir nun:

$$\int_{\Gamma} \Delta b \frac{\partial \Delta b}{\partial \nu} ds = \int_0^{2\pi} \Delta b(\theta) \frac{\partial \Delta b}{\partial r}(\theta) d\theta = 16\pi \sum_{k=1}^N k(k+1)^2 (\gamma_k^2 + \delta_k^2)$$

$$= 8 \sum_{k=1}^N \left\{ k(k+1)^2 \left[ \left( \sum_{l=1}^M \frac{\alpha_{kl}}{j_{kl}^3} \right)^2 + \left( \sum_{l=1}^M \frac{\beta_{kl}}{j_{kl}^3} \right)^2 \right] \right\},$$

(2.34)

wobei

$$\left( \sum_{l=1}^M \frac{\alpha_{kl}}{j_{kl}^3} \right)^2 \leq_{SU} \left( \sum_{l=1}^M \frac{1}{j_{kl}^6} \right) \left( \sum_{l=1}^M \alpha_{kl}^2 \right) \quad \text{mit}$$

$$\sum_{l=1}^M \frac{1}{j_{kl}^6} \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{j_{kl}^6} = \frac{1}{32(k+1)^3(k+2)(k+3)} \quad (\text{siehe WATSON [58], S.502})$$

Bei analoger Abschätzung für den Ausdruck über  $\beta_{kl}$  erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \Delta b \frac{\partial \Delta b}{\partial \nu} ds &= \frac{1}{4} \left( \sum_{k=1}^N \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} \left( \sum_{l=1}^M \alpha_{kl}^2 + \beta_{kl}^2 \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{96} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M (\alpha_{kl}^2 + \beta_{kl}^2) = \frac{1}{96} |\Delta^2 u|^2 \end{aligned}$$

Wir erhalten also  $C_{\Gamma} = \frac{1}{96}$  und damit

$$(2.35) \quad 0.4158 = \frac{1}{j_{01}} \leq C_3(2, K_1) \leq \sqrt{\frac{1}{j_{01}^2} + \frac{1}{96}} = 0.4282.$$

Mit ähnlichen, allerdings noch weit umfangreicheren Abschätzungen, welche weitere Eigenschaften der Besselfunktionen ausnutzen, läßt sich auch die Abschätzung für die vierten Ableitungen herleiten. Ohne Beweis sei hier das Resultat genannt, nämlich:

$$(2.36) \quad \forall u \in H_{01}^{m,2}(K_1) \cap H^{2m,2}(K_1): |u|_{4,2} \leq C_4(2, K_1) |\Delta^2 u|_{0,2}$$

mit  $C_4(2, K_1) \leq \left( 1 + \frac{1}{48} + \frac{1}{\sqrt{96}} + \frac{1}{\sqrt{384}} \right)^{1/2}$

Mit diesen Abschätzungen haben wir im Prinzip zugleich die entsprechenden Abschätzungen für solche Gebiete gewonnen, die sich regulär und genügend glatt auf das Innere des Einheitskreises abbilden lassen (vergl. z.B. ADAMS [3], Abschnitt 3.34 und 3.35). Aber selbst wenn es sich um konforme Abbildungen handelt, würden die zugehörigen Abschätzungen zu aufwendig werden und an Schärfe wesentlich verlieren. Eine Ausnahme ist lediglich der Trivialfall; wo  $K_1$  auf einen Kreis  $K_a$  vom Radius  $a$  transformiert wird. Hierfür zeigt man leicht:

$$(2.37) \quad C_k(m, K_a) = a^{2m-k} C_k(m, K_1) \quad , \quad k = O(1)2m$$

Das gleiche Resultat erhält man bei Transformation von  $(0,1)$  auf  $(0,a)$  oder auch von  $(0,1) \times (0,1)$  auf  $(0,a) \times (0,a)$ .

Im Rahmen von Bemerkung 2 zu Satz 2, Kapitel II, läßt sich die strenge Glattheitsvoraussetzung an  $\Omega$  auch für  $m = 2$  gegebenenfalls abschwächen. Wir betrachten hier den Fall  $\Omega := Q_1 := (0,1) \times (0,1)$  mit dem Ziel, eine obere Schranke für  $C_3(2, Q_1)$  zu bestimmen.

Die Existenz von  $C_3(2, Q_1)$  voraussetzend gehen wir wieder nach Satz 3 davon aus, daß

$$(2.38) \quad \Delta^2 u = \sum_{k,l=1}^{N,M} a_{kl} \varphi_{kl} \quad \text{und} \quad u = u_0 + b \quad , \quad \text{wobei}$$

$$(2.39) \quad u_0 = \sum_{k,l=1}^{N,M} a_{kl} \lambda_{kl}^{-2} \varphi_{kl}$$

und  $b$  bestimmt ist durch:

$$(2.40) \quad \Delta^2 b = 0 \quad \text{auf} \quad Q_1 \quad , \quad b|_{\Gamma} = 0 \quad , \quad \frac{\partial b}{\partial \nu}|_{\Gamma} = - \frac{\partial u_0}{\partial \nu}|_{\Gamma}$$

Die Eigenwerte und orthonormierten Eigenfunktionen sind hier bekanntlich gegeben durch

$$(2.41) \quad \lambda_{kl} = \pi^2(k^2 + l^2) \quad , \quad \varphi_{kl}(x,y) = 2 \sin k\pi x \sin l\pi y \quad , \quad k,l \in \mathbb{N} \quad , \quad (x,y) \in \overline{Q_1}$$

(vergl. z.B. COURANT-HILBERT [17] Bd. I, S. 301)

Zwar ist (2.40) im klassischen Sinne lösbar (vergl. Kapitel II, Bemerkung 1, S. 65-66), jedoch können wir  $b$  nicht wie beim entsprechenden Problem für den Kreis analytisch bestimmen. Setzen wir

$$(2.42) \quad b = \sum_{k,l=1}^{N,M} a_{kl} \lambda_{kl}^{-2} b_{kl} \quad ,$$

so ist (2.40) erfüllt, wenn die Funktionen  $b_{kl}$  für  $k,l \in \mathbb{N}$  bestimmt sind durch:

$$(2.43) \quad \Delta^2 b_{kl} = 0 \quad \text{auf} \quad Q_1 \quad , \quad b_{kl}|_{\Gamma} = 0$$

$$\frac{\partial b_{kl}}{\partial \nu}|_{\Gamma} = - \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 2\pi \begin{cases} k \sin l\pi y & \text{für} \quad x = 0, y \in [0,1] \\ (-1)^{k+1} k \sin l\pi y & \text{für} \quad x = 1, y \in [0,1] \\ 1 \sin k\pi x & \text{für} \quad y = 0, x \in [0,1] \\ (-1)^{l+1} 1 \sin k\pi x & \text{für} \quad y = 1, x \in [0,1] \end{cases}$$

Es gilt dann

$$(2.44) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} \Delta b \right|_{0,2} \leq \sum_{k,l=1}^{N,M} |a_{kl}| \lambda_{kl}^{-2} \left| \frac{\partial}{\partial x} \Delta b_{kl} \right|_{0,2} \\ \leq (SU) \left( \sum_{k,l=1}^{N,M} a_{kl}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k,l=1}^{N,M} \lambda_{kl}^{-4} \left| \frac{\partial}{\partial x} \Delta b_{kl} \right|_{0,2}^2 \right)^{1/2}$$

Aus der entsprechenden Beziehung für  $\frac{\partial}{\partial y} \Delta b$  und aus (2.16) folgt:

$$\int_{\Gamma} \Delta b \frac{\partial \Delta b}{\partial \nu} ds = |\nabla^2 b|_{0,2}^2 \stackrel{(2.44)}{\leq} \left( \sum_{k,l=1}^{N,M} a_{kl}^2 \right) \left( \sum_{k,l=1}^{N,M} \lambda_{kl}^{-4} |\nabla^2 b_{kl}|_{0,2}^2 \right) \\ \leq C_{\Gamma} |\Delta^2 u|_{0,2}^2$$

mit

$$(2.45) \quad C_{\Gamma} := \sum_{k,l=1}^{\infty} \lambda_{kl}^{-4} \int_{\Gamma} \Delta b_{kl} \frac{\partial \Delta b_{kl}}{\partial \nu} ds < 0.24$$

Die Konvergenz dieser Reihe und ihr Wert beruhen auf numerischen Ergebnissen. Zu vorgegebenem Indexpaar  $(k,l)$  wurde jeweils das Problem (2.43) mit dem Verfahren aus Anhang II.B gelöst und für diese numerische Lösung von  $b_{kl}$  das obige Randintegral ausgewertet. Da mit wachsendem  $k$  und  $l$  der Faktor  $\lambda_{kl}^{-4}$  rasch abfällt, konnte auf diese Weise eine für die Praxis zufriedenstellende obere Schranke für  $C_{\Gamma}$  ermittelt werden. Immerhin waren hierzu bei einem Abstand der Gitterpunkte von  $h := \frac{1}{20}$  und bei Summation der Ergebnisse über  $k,l = 1(1)10$  ca. 50.000 sec. Rechenzeit auf der DVA TR 445 erforderlich.

Mit der so ermittelten Abschätzung für  $C_{\Gamma}$  erhalten wir damit nach Satz 3 und der dort anschließenden Bemerkung:

$$(2.46) \quad 0.225 \mp \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \leq C_3(2, Q_1) \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi^2} + 0.24} \approx 0.54$$

### 3. Abschätzung von $|u|_{k,\infty}$ durch $|\Delta^m u|_{0,2}$

Aus entsprechenden Beweisansätzen bei ADAMS und FRIEDMAN ([3] Lemma 5.15 bzw. [25] Theorem 9.1) leiten wir hinsichtlich der Einbettung (i), S. 55, zunächst folgende allgemeine Abschätzung her:

#### Satz 4

$\Omega$  sei eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und erfülle die Kegelbedingung vermöge eines Kegels  $C$  mit der Höhe  $h$  und dem Öffnungswinkel  $\alpha$ . Im Falle  $n < 2k$  gilt

$$(3.1) \quad \forall u \in H^{k,2}(\Omega): \|u\|_{0,\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{(2k-n)n} \operatorname{vol}(C)} \sum_{v=0}^k \frac{(k-v)!}{(k-1)!} \binom{k}{v}^2 h^v |u|_{v,2}.$$

#### Beweis

Da die Abschätzung von  $\|u\|_{0,\infty}$  durch  $\|u\|_{k,2}$  bereits nach der allgemein bekannten Einbettungsaussage gesichert ist (vergl. Kapitel II, S.55) können wir uns zur Bestimmung der Einbettungs-Konstanten nach dem Stetigkeitslemma auf den Fall  $u \in C^k(\Omega)$  beschränken.

Es sei  $x^0 \in \Omega$  festgewählt;  $C_0$  sei der nach Voraussetzung existierende zu  $C$  kongruente Kegel mit Spitze in  $x^0$  (vergl. Kapitel II, Bemerkung 1, S. 51). Da die betrachteten Normen in bezug auf Verschiebung des Koordinatensystems unabhängig sind, können wir ohne Einschränkung  $x^0$  als Ursprung annehmen, so daß bei Einführung von Polarkoordinaten jeder Punkt  $x = (x_1, \dots, x_n) \in C_0$  charakterisiert wird durch:

$$(3.2) \quad x_1 = r \prod_{j=1}^{n-1} \sin \theta_j, \quad x_i = r \cos \theta_{i-1} \prod_{j=i}^{n-1} \sin \theta_j \quad \text{für } i = 2(1)n$$

$$\text{wobei: } r \in (0, h), \quad \theta := (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \in S_\alpha := \left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \times (0, \pi]^{n-2}$$

Mit dem zugehörigen Volumenelement

$$(3.3) \quad dV = w(\theta) r^{n-1} dr d\theta, \quad w(\theta) := \sin^{n-2} \theta_{n-1} \sin^{n-3} \theta_{n-2} \dots \sin \theta_2$$

erhalten wir für das Volumen von  $C$  bzw.  $C_0$ :

$$(3.4) \quad \operatorname{vol}(C_0) = \operatorname{vol}(C) = \int_0^h \int_{S_\alpha} dV = \frac{h^n}{n} \int_{S_\alpha} w(\theta) d\theta$$

Es sei nun  $g \in C^k[0,1]$  mit

$$(3.5) \quad g(0) = 1, \quad g^{(v)}(1) = 0 \quad \text{für } v = 0(1)k-1 \quad (\text{Beispiel s.u.})$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$g(1)u(h, \theta) - g(0)u(0, \theta) = \int_0^h \frac{\partial}{\partial r} [g(r)u(r, \theta)] dr,$$

womit für alle  $\theta \in S_\alpha$ :

$$u(x^0) = - \int_0^h \frac{\partial}{\partial r} \left[ g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right] dr$$

Nach Definition von  $g$  verschwinden für  $v = 1(1)k$  die Ausdrücke

$$r^v \frac{\partial^{v-1}}{\partial r^{v-1}} \left[ g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right] \text{ an den Grenzen } r = 0 \text{ und } r = h ; \text{ durch}$$

$(k-1)$ -fache partielle Integration erhält man deshalb

$$u(x^0) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \int_0^h r^{k-1} \frac{\partial^k}{\partial r^k} \left[ g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right] dr$$

und durch Integration über  $\theta \in S_\alpha$

$$u(x^0) \int_{S_\alpha} w(\theta) d\theta = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \int_{S_\alpha} \int_0^h \frac{\partial^k}{\partial r^k} \left[ g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right] r^{k-n} r^{n-1} w(\theta) dr d\theta ,$$

womit nach (3.3) und (3.4)

$$u(x^0) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \frac{h^n}{n \operatorname{vol}(C)} \int_{C_0} \frac{\partial^k}{\partial r^k} \left[ g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right] r^{k-n} dv$$

und nach der SU

$$|u(x^0)| \leq \frac{h^n}{(k-1)! n \operatorname{vol}(C)} \left( \int_{C_0} \left| \frac{\partial^k}{\partial r^k} \left[ g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right] \right|^2 dv \right)^{1/2} \left( \int_{C_0} r^{2(k-n)} dv \right)^{1/2} .$$

Wegen  $2k > n$  gilt hierbei für das zweite Integral:

$$\int_{C_0} r^{2(k-n)} dv = \int_0^h \int_{S_\alpha} r^{2k-n-1} w(\theta) d\theta dr = \frac{h^{2k-n}}{2k-n} \int_{S_\alpha} w(\theta) d\theta = \frac{h^{2k-n} n \operatorname{vol}(C)}{(2k-n) h^n}$$

Für das andere Integral erhalten wir nach der Leibnizschen Regel (siehe z.B. AGMON [5] Theorem 1.13) der Dreiecksungleichung in  $L^2(C_0)$  und Abspalten der Maxima von  $g^{(k-v)}$

$$\begin{aligned} \left( \int_{C_0} \left| \frac{\partial^k}{\partial r^k} \left[ g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, 0) \right] \right|^2 dv \right)^{1/2} &= \left( \int_{C_0} \left| \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} h^{v-k} g^{(k-v)}\left(\frac{r}{h}\right) \frac{\partial^v}{\partial r^v} u(r, \theta) \right|^2 dv \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} h^{v-k} \|g^{(k-v)}\|_{0,\infty} \left| \frac{\partial^v u}{\partial r^v} \right|_{0,2,C_0} \end{aligned}$$

Unter Benutzung der Mittelungleichung (vergl. Kapitel II, S. 53) und den Beziehungen zwischen  $\cos$  und  $\sin$  läßt sich zeigen, daß

$$\left( \frac{\partial^v u}{\partial r^v} \right)^2 \leq \sum_{|\alpha|=v} \frac{v!}{\alpha!} (D^\alpha u)^2 ,$$

womit wegen  $C_0 \subset \Omega$

$$\left| \frac{\partial^v u}{\partial r^v} \right|_{0,2,C_0} \leq |u|_{v,2,C_0} \leq |u|_{v,2,\Omega}.$$

Wir erhalten hiernach insgesamt

$$|u(x^0)| \leq \frac{1}{\sqrt{(2k-n)n} \operatorname{vol}(C)} \sum_{v=0}^k \frac{1}{(k-1)!} \binom{k}{v} \|g^{(k-v)}\|_{0,\infty} h^v |u|_{v,2}.$$

Da die Abschätzung unabhängig von  $x^0 \in \Omega$  ist, gilt sie auch für  $\|u\|_{0,\infty}$ .

Die weitere Abschätzung hängt von der Wahl der Funktion  $g$  ab. Für

$g(t) := (1-t)^k$  erhält man mit  $\|g^{(k-v)}\|_{0,\infty} = \frac{k!}{v!}$  die Behauptung (3.1). ▲

### Spezialfälle $n = 1$ und $n = 2$

Für den eindimensionalen Fall  $\Omega := (0, a)$  ( $a > 0$ ) können wir  $k := 1$  und  $C := \Omega$  setzen. Aus (3.1) erhalten wir dann die wohlbekannte Abschätzung:

$$(3.6) \quad \forall u \in H^{1,2}(0, a) \quad \|u\|_{0,\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} |u|_{0,2} + \sqrt{a} |u|_{1,2}$$

Für  $n = 2$  können wir  $k := 2$  setzen. Mit  $\operatorname{vol}(C) = \frac{\alpha h^2}{2}$  erhalten wir aus (3.1):

$$(3.7) \quad \forall u \in H^{2,2}(\Omega): \|u\|_{0,\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left( \frac{2}{h} |u|_{0,2} + 4|u|_{1,2} + h|u|_{2,2} \right)$$

In (3.6) ist der erste Term auf der rechten Seite entbehrlich, falls  $u$  auf dem Rand verschwindet. Unter dieser Zusatzvoraussetzung ist gemäß den vorangegangenen Abschnitten bei genügenden Regularitätsbedingungen  $\|u\|_{2,2}$  durch  $|\Delta u|_{0,2}$  abzuschätzen. Damit ist aber z.B. unter den Voraussetzungen von Satz 2 auch  $\|u\|_{0,\infty}$  durch  $|\Delta u|_{0,2}$  gleichmäßig auf  $H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$  abschätzbar.

Aus (3.7) erhält man so z.B. für  $n = 2$  als erste Abschätzung:

$$(3.8) \quad \forall u \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega): \|u\|_{0,\infty} \leq D |\Delta u|_{0,2}$$

$$\text{mit } D := \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left[ \frac{2}{h} C_0(1, \Omega) + 4C_1(1, \Omega) + hC_2(1, \Omega) \right]$$

Diese Abschätzung läßt sich in der Regel noch erheblich verbessern.

Insbesondere gilt:

### Satz 5

Es sei  $\Omega$  eine offene, einfach zusammenhängende Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ ;  $\Omega$  erfülle die Kegelbedingung und sei enthalten in einem Kreis vom Radius  $a$ . Dann gilt:

$$(3.9) \quad \forall u \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega): \|u\|_{0,\infty} \leq \frac{a}{2} \|\Delta u\|_{0,2}$$

### Beweis

Da unter den gemachten Voraussetzungen an  $\Omega$  die Abschätzung als solche mit einer gewissen Einbettungskonstanten gesichert ist, können wir wieder o.E. annehmen, daß  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  und  $u|_{\Gamma} = 0$  ist. Unter dieser Voraussetzung hat aber  $u$  die Darstellung

$$(3.10) \quad \forall y \in \Omega: u(y) = \int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) \Delta u(x) dx.$$

Hierbei ist  $G_{\Omega}: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die "Greensche Funktion" zum DP 1. Ordnung. Nach FRANK-MISES [24] Bd. I, S. 579 und S. 704 gilt:

$$(3.11) \quad \forall x, y \in \Omega: G_{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln |f(z)|, \text{ wobei}$$

$z := x_1 + ix_2$  der  $x$  entsprechende Punkt in der komplexen Ebene

$f: \Omega \rightarrow K_1$  eine konforme Abbildung auf den Einheitskreis (um Null), die den  $y$  entsprechenden Punkt

$w := y_1 + iy_2$  auf Null abbildet.

Der Punkt  $y \in \Omega$  sei im folgenden fest gewählt. Gemäß den Eigenschaften einer konformen Abbildung ist  $f$  analytisch auf  $\Omega$ ,  $w$  ist einzige und einfache Nullstelle von  $f$  und es gilt

$$(3.12) \quad |f(z)| < 1 \text{ für alle } z \in \Omega \text{ und } |f(z)| = 1 \text{ für } z \in \Gamma.$$

Da die Normabschätzung translationsinvariant ist, können wir o.E. annehmen, daß  $\Omega$  in einem Kreis um Null vom Radius  $a$  enthalten ist. Analog zu oben existiert eine auf diesem Kreis  $K_a$  analytische Funktion  $g$ , so daß  $w$  einfache und einzige Nullstelle von  $g$  ist,

$$(3.13) \quad |g(z)| < 1 \text{ für alle } z \in K_a \text{ und } |g(z)| = 1 \text{ für } |z| = a$$

und durch  $G_a(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln |g(z)|$ ,  $x, y \in K_a$  die Greensche Funktion für das Gebiet  $K_a$  definiert wird.

Da  $w$  einzige und einfache Nullstelle von  $f$  und  $g$  ist, ist auch  $\varphi := \frac{g}{f}$  analytisch auf  $\Omega$ . Nach (3.12) und (3.13) gilt:

$$(3.14) \quad \forall z \in \Gamma: |\varphi(z)| = \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| = |g(z)| \leq 1$$

Nach dem Maximumsprinzip (siehe z.B. CARTAN [13], S. 84) nimmt  $\varphi$  sein Maximum in  $\bar{\Omega}$  auf dem Rand  $\Gamma$  an. Deshalb ist nach (3.14)  $|g(z)| \leq |f(z)| < 1$  für alle  $z \in \Omega$ , womit

$$(3.15) \quad \forall x \in \Omega \setminus \{y\}: |G_{\Omega}(x, y)| \leq |G_a(x, y)|$$

Aus (3.10) erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} |u(y)| &\leq \left( \int_{SU} |G_{\Omega}(x, y)|^2 dx \right)^{1/2} |\Delta u|_{0,2} \\ &\stackrel{(3.15)}{\leq} \left( \int_{\Omega} |G_a(x, y)|^2 dx \right)^{1/2} |\Delta u|_{0,2} \\ &\leq \left( \int_{K_a} |G_a(x, y)|^2 dx \right)^{1/2} |\Delta u|_{0,2} \end{aligned}$$

Da die Betrachtungen unabhängig sind von  $y \in \Omega$ , erhalten wir durch Bildung des Supremums:

$$(3.16) \quad \|u\|_{0,\infty} \leq D |\Delta u|_{0,2} \quad \text{mit} \quad D := \sup_{y \in K_a} \left( \int_{K_a} |G_a(x, y)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Wir zeigen zunächst, daß dieses Supremum - seine Existenz vorausgesetzt - im Nullpunkt angenommen wird. Hierzu sei  $v \in C^2(\bar{K}_a)$  erklärt durch

$$(3.17) \quad \forall y \in \bar{K}_a: v(y) := \frac{1}{4} (a^2 - |y|^2).$$

$v$  ist Lösung des hKDP auf  $K_a$  zur rechten Seite identisch Eins und zu  $L := -\Delta$ , so daß nach der Eigenschaft von  $G_a$ :

$$(3.18) \quad \forall y \in K_a: \int_{K_a} |G_a(x, y)| dx = - \int_{K_a} G_a(x, y) dx = \frac{1}{4} (a^2 - |y|^2)$$

Hieraus folgt wiederum für beliebiges  $y \in K_a$ :

$$\int_{K_a} |G_a(x, 0)|^2 dx - \int_{K_a} |G_a(x, y)|^2 dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{K_a} (|G_a(x,0)| - |G_a(x,y)|) (|G_a(x,0)| + |G_a(x,y)|) dx \\
 &\geq \inf \{ |G_a(x,0)| + |G_a(x,y)| \} \cdot \int_{K_a} (|G_a(x,0)| - |G_a(x,y)|) dx \geq 0 \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Hiernach nimmt die  $L^2$ -Norm von  $G_a(\cdot, y)$  für  $y := 0$  ihr Maximum an (es gilt jedoch nicht:  $|G_a(x,0)| \geq |G_a(x,y)|$ !), so daß

$$(3.18) \quad D = \left( \int_{K_a} |G_a(x,0)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Die Greensche Funktion für  $K_a$  lautet (vergl. FRANK-MISES [24], Bd. I, S. 709):

$$(3.19) \quad G_a(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z-w}{a-\frac{zw}{w}} \right|, \quad z = x_1 + ix_2, \quad w = y_1 + iy_2 \in K_a$$

Schreiben wir  $x \in K_a$  in Polarkoordinaten zu  $x = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  mit  $r \in [0, a)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , so erhalten wir  $G_a(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{a}$  und

$$\begin{aligned}
 D^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{K_a} \left( \ln \frac{r}{a} \right)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( \ln \frac{r}{a} \right)^2 r \, dr \, d\varphi \\
 &= a^2 \int_0^1 \left( \ln r \right)^2 r \, dr = a^2 \left[ \frac{r^2}{4} (2(\ln r)^2 - 2 \ln r + 1) \right]_0^1 = \frac{a^2}{4}
 \end{aligned}$$

Dies ist natürlich zugleich der Nachweis für die Existenz der betrachteten uneigentlichen Integrale.

### Bemerkungen

1. Für  $\Omega := K_a$  erhält man aus (3.8) und den Konstanten aus Abschnitt 1 und 2 einen ca. dreimal so hohen Wert, wenn man den Kegel mit  $h := a$  und  $\alpha := \frac{2\pi}{3}$  wählt.
2. Es ist allgemein bekannt, daß für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ :

$$(3.20) \quad \forall y \in \Omega: u(y) = \int_{\Omega} K(x, y) \Delta u(x) dx, \text{ wobei}$$

$$K(x,y) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \|x-y\| & \text{für } n = 2 \\ c_n \|x-y\|^{2-n} & \text{für } n \geq 3 \text{ } (c_n > 0) \end{cases}$$

Die Funktion  $K$  ist die sogenannte "Fundamentallösung" zu  $L = -\Delta$  (vergl. FRIEDMAN [25], S. 4). Im Fall  $n = 2$  und  $n = 3$  ist für beschränkte Gebiete:

$$\sup_{y \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x,y)|^2 dx < \infty,$$

indem für  $n < 4$  das Integral  $\int_0^a r^{2(2-n)} r^{n-1} dr$  endlich ist.

Wir erhalten deshalb für  $n = 2$  und  $n = 3$  sofort:

$$(3.21) \quad \|u\|_{0,\infty} \leq \left( \sup_{y \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x,y)|^2 dx \right)^{1/2} |\Delta u|_{0,2}$$

für alle  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ , und damit für alle  $u \in H_0^{2,2}(\Omega)$ .

Die eben für  $n = 2$  bewiesene Abschätzung (3.8) bedeutet jedoch eine Ausdehnung des Gültigkeitsbereiches von (3.21) auf  $H_0^1(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$ , wobei darüber hinaus das Supremum geeignet abgeschätzt werden konnte. Entsprechendes ist auch für den dreidimensionalen Fall möglich. Allerdings stehen hierzu nicht mehr die starken Aussagen der Funktionentheorie zur Verfügung. Einen möglichen Zugang liefert neben dem Analogon zu (3.8) die Abschätzungsidee von SIGILLITO (siehe [47], S. 66-69) oder Lemma 4, S. 101.

3. Vollständigkeitshalber geben wir die entsprechende Abschätzung für den eindimensionalen Fall  $\Omega := (0,a)$  an. Hier gilt für die Green-sche Funktion  $G$  (vergl. COURANT-HILBERT [17], Bd. I, S. 371):

$$(3.22) \quad G(x,y) = \begin{cases} x(1-\frac{y}{a}) & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq a \\ y(1-\frac{x}{a}) & \text{für } 0 \leq y \leq x \leq a \end{cases}$$

$$(3.23) \quad \forall y \in [0,a]: \int_0^a |G(x,y)|^2 dx = -\frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{3a} y^4 + \frac{a}{3} y^2$$

Der letzte Ausdruck ist maximal für  $y := \frac{a}{2}$ . Hieraus folgt

$$(3.24) \quad \forall u \in H_0^{1,2}(0,a) \cap H^{2,2}(0,a): \|u\|_{0,\infty} \leq \sqrt{\frac{a}{48}} |u''|_{0,2}$$

Für die Anwendung ist es zweckmäßig, parallel zu den Konstanten  $C_k(m, \Omega)$  allgemein Konstanten  $D_k(m, \Omega)$  einzuführen mit der Eigenschaft

$$(3.25) \quad \forall u \in H_0^{m,2}(\Omega) \cap H^{2m,2}(\Omega): |u|_{k,\infty} \leq D_k(m, \Omega) |\Delta^m u|_{0,2},$$

wobei wir unter genügenden Glattheitsvoraussetzungen an  $\Omega$  davon ausgehen können, daß  $D_k(m, \Omega)$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $k < 2m - \frac{n}{2}$  existiert; denn hierfür wird nach der Einbettung (i)  $\|D^\alpha u\|_{0,\infty}$  mit  $|\alpha| \leq k$  durch  $\|u\|_{2m,2}$  und damit bei Existenz der Konstanten  $C_k(m, \Omega)$  auch durch  $|\Delta^m u|_{0,2}$  abgeschätzt.

Im folgenden sei  $D_k(m, \Omega)$  stets als bestmögliche Schranke ihrer Art verstanden, so daß nach Satz 5 z.B.  $D_0(1, K_a) \leq \frac{a}{2}$ . Obere Schranken für  $D_k(m, \Omega)$  mit  $k, m > 1$  lassen sich wieder durch Kombination der gewonnenen Abschätzungen aus Satz 4 und Satz 5 mit den Konstanten  $C_k(m, \Omega)$  aus Abschnitt 1 und 2 gewinnen. Insbesondere gilt

### Lemma 3

a) Es sei  $m \geq 2$ ; es existiere  $D_0(1, \Omega)$  sowie  $C_2(m, \Omega)$  bzw.  $C_3(m, \Omega)$ ; dann existieren auch  $D_0(m, \Omega)$  bzw.  $D_1(m, \Omega)$ , wobei:

$$(3.26) \quad D_0(m, \Omega) \leq D_0(1, \Omega) C_2(m, \Omega)$$

$$(3.27) \quad D_1(m, \Omega) \leq D_0(1, \Omega) C_3(m, \Omega)$$

b) Es sei  $n = 2$  und  $\Omega$  erfülle die Kegelbedingung, vermöge eines Kegels mit Höhe  $h$  und Öffnungswinkel  $\alpha$  und es existiere  $C_k(m, \Omega)$  für  $k = 2, 3, 4$ ; dann existiert auch  $D_2(m, \Omega)$ , wobei

$$(3.28) \quad D_2(m, \Omega) \leq \left( \frac{21}{2\alpha} \left[ h^{-2} C_2^2(m, \Omega) + C_3^2(m, \Omega) + h^2 C_4^2(m, \Omega) \right] \right)^{1/2}$$

### Beweis

Zu (3.26):  $u \in H_0^{m,2}(\Omega) \cap H^{2m,2}(\Omega)$  ist insbesondere auch aus  $H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$ , womit:

$$\begin{aligned} |u|_{0,\infty} &\leq D_0(1, \Omega) |\Delta u|_{0,2} \leq D_0(1, \Omega) |u|_{2,2} \\ &\leq D_0(1, \Omega) C_2(m, \Omega) |\Delta^m u|_{0,2} \end{aligned}$$

Zu (3.27): Wegen  $m \geq 2$  ist für  $u \in H_0^{m,2}(\Omega) \cap H^{2m,2}(\Omega)$  auch

$$D_i u \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega), \quad i = 1(1)n, \quad \text{womit}$$

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{1,\infty}^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n |D_i u|^2 \right\|_{0,\infty} \leq \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{0,\infty}^2 \\
 &\leq D_0^2(1,\Omega) \sum_{i=1}^n \|\Delta(D_i u)\|_{0,2}^2 = D_0^2(1,\Omega) \| \nabla^2 u \|_{0,2}^2 \\
 &< D_0^2(1,\Omega) C_J^2(m,\Omega) \|\Delta^m u\|_{0,2}^2
 \end{aligned}$$

Zu (3.28):  $\|u\|_{2,\infty}^2 = \left\| \sum_{i,j=1}^2 |D_i D_j u|^2 \right\|_{0,\infty}$ , wobei nach (3.7) jeweils

$$\begin{aligned}
 |D_i D_j u|_{0,\infty}^2 &\leq \frac{1}{2\alpha} \left[ \frac{2}{h} |D_i D_j u|_{0,2} + 4 |D_i D_j u|_{1,2} + h |D_i D_j u|_{2,2} \right]^2 \\
 &\leq \frac{1}{2\alpha} (4+16+1) \left[ h^{-2} |D_i D_j u|_{0,2}^2 + |D_i D_j u|_{1,2}^2 + h^2 |D_i D_j u|_{2,2}^2 \right].
 \end{aligned}$$

Durch Summation folgt

$$\|u\|_{2,\infty}^2 \leq \frac{21}{2\alpha} \left[ h^{-2} \|u\|_{2,2}^2 + \|u\|_{3,2}^2 + h^2 \|u\|_{4,2}^2 \right]$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung. ▲

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung einer geeigneten oberen und auch unteren Schranke für  $D_k(m,\Omega)$  bietet auch wieder die Entwicklung nach Eigenfunktionen. Hierzu gilt speziell

#### Lemma 4

Es sei  $n \in \{1, 2, 3\}$  und  $\Omega$  erfülle die gleichen Voraussetzungen wie in Satz 2. Es seien  $\lambda_j$  und  $\varphi_j$  die Eigenwerte bzw. die in  $L^2(\Omega)$  normierten Eigenfunktionen zum DP für  $L = -\Delta$ . Ferner seien Konstanten  $c_j > 0$  bekannt, derart daß

$$(3.29) \quad \|\varphi_j\|_{0,\infty} \leq c_j \quad \text{für } j \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad S := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-2} c_j^2 < \infty.$$

Dann gilt  $D_0(1,\Omega) \leq \sqrt{S}$ .

#### Beweis

Sei  $u \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$  vorgegeben. Nach den Voraussetzungen über  $\Omega$  ist die Existenz von  $D_0(1,\Omega)$  bereits gesichert und wir können wieder ohne Einschränkung annehmen, daß  $\Delta u$  nach den Eigenfunktionen  $\varphi_j$  entwickelt ist, womit:

$$(3.30) \quad \Delta u = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j, \quad \|\Delta u\|_{0,2}^2 = \sum_{j=1}^N |\alpha_j|^2, \quad u = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{-1} \alpha_j \varphi_j$$

Hieraus erhalten wir aber:

$$\begin{aligned} \|u\|_{0,\infty} &\leq \sum_{j=1}^N \lambda_j^{-1} |\alpha_j| \|\varphi_j\|_{0,\infty} \leq \left( \sum_{j=1}^N \lambda_j^{-2} \|\varphi_j\|_{0,\infty}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^N |\alpha_j|^2 \right)^{1/2} \\ &\stackrel{(3.29)}{\leq} \sqrt{S} \|\Delta u\|_{0,2} \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Wir orientieren uns zunächst am eindimensionalen Fall  $\Omega := (0, a)$ , wo

$$(3.31) \quad \lambda_j = \left(\frac{j\pi}{a}\right)^2, \quad \varphi_j = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(j\pi \frac{x}{a}), \quad c_j = \sqrt{\frac{2}{a}}; \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{und}$$

$$(3.32) \quad S = \frac{2a^3}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-4} = \frac{a^3}{45} \quad (\text{vergl. BRONSTEIN [11], S. 254})$$

Lemma 3 liefert hier also einen geringfügig schlechteren Wert als die Abschätzung (3.24) mit Hilfe der Greenschen Funktion. Wir betrachten jetzt speziell die Funktion  $v := \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \varphi_j$  mit

$$(3.33) \quad \beta_j := \begin{cases} (-1)^{\frac{j-1}{2}} \lambda_j^{-2} c_j & \text{für } j = 2k-1, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } j = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Die Reihe ist gleichmäßig konvergent auf  $\bar{\Omega}$  und stellt eine Funktion aus  $H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$  dar, wobei

$$\|v\|_{0,\infty} = |v(\frac{a}{2})| = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{c_{2i-1}}{\lambda_{2i-1}} \right)^2 = \frac{2a^3}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} (2i-1)^{-4} = \frac{a^3}{48} = \|v\|_{0,2}^2$$

Hieraus folgt aber die Optimalität der Abschätzung (3.24), also

$$(3.34) \quad D_0(1, \Omega) = \sqrt{\frac{a^3}{48}}.$$

Für den zweidimensionalen Fall  $\Omega := K_1$  erhalten wir mit Hilfe der Eigenfunktionen aus (2.27):

$$(3.35) \quad D_0(1, K_1) \geq \sqrt{S_0} \quad \text{mit} \quad S_0 := \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} j_{0l}^{-4} |J_1(j_{0l})|^{-2} = \frac{1}{8\pi},$$

womit insgesamt:

$$(3.36) \quad 0.19947 \approx \sqrt{S_0} \leq D_0(1, K_1) \leq 0.5$$

Für (3.35) wurde benutzt, daß für alle  $l \in \mathbb{N}$   $J'_0(j_{0l}) = -J_1(j_{0l})$  und  $J_0(j_{0l}r)$  sein Maximum bei  $r = 0$  mit dem Wert 1 annimmt. Der Wert für  $S_0$  wurde numerisch berechnet.

Die Bestimmung einer oberen Schranke für  $D_0(1, K_1)$  mit Hilfe der Eigenfunktionen wäre sehr aufwendig und wurde als nicht lohnend angesehen. Nach der Erfahrung mit dem eindimensionalen Fall ist eine wesentliche Verbesserung der Schranke aus Satz 5 nur dann zu erwarten, wenn  $\Omega$  stark von der Kreisform abweicht.

Wir betrachten den Fall eines Rechtecks  $\Omega := (0, a) \times (0, b)$ , wo die betreffenden Eigenwerte und Eigenfunktionen mit  $k, l \in \mathbb{N}$  gegeben sind durch:

$$(3.37) \quad \lambda_{kl} = \pi^2 \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right), \quad \varphi_{kl} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin k\pi \frac{x}{a} \sin l\pi \frac{y}{b}, \quad c_{kl} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

Analog zum eindimensionalen Fall erhalten wir

$$(3.38) \quad \sqrt{S_u} \leq D_0(1, \Omega) \leq \sqrt{S} \quad \text{mit} \quad S := \frac{4}{\pi^4} a^3 b^3 \sum_{k, l=1}^{\infty} \frac{1}{(b^2 k^2 + a^2 l^2)^2};$$

in  $S_u$  wird lediglich über alle ungeraden  $k$  und  $l$  summiert.

$S$  läßt sich leicht dadurch berechnen, daß man alle Summanden, die größer als eine vorgegebene Schranke  $\varepsilon^2$  ausfallen, aufsummiert und den Reihenrest durch das entsprechende Integral über

$V_\varepsilon := \{(x, y) \in F \mid b^2 x^2 + a^2 y^2 \geq \varepsilon^{-1}; x, y > 0\}$  abschätzt, wobei

$$(3.39) \quad \int_{V_\varepsilon} \frac{dx dy}{(b^2 x^2 + a^2 y^2)^2} = \frac{\pi}{4ab} \varepsilon$$

Für das Einheitsquadrat  $Q_1 (a := b := 1)$  erhält man daraus speziell die Einschließung:

$$(3.40) \quad 0.1077 \approx \sqrt{S_u} \leq D_0(1, Q_1) \leq \sqrt{S} \approx 0.1320103$$

Im Vergleich dazu folgt aus Satz 5 als obere Schranke der Wert

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.354.$$

Vom Prinzip her läßt sich die Idee von Lemma 4 zur Bestimmung von oberen und unteren Schranken von  $D_k(m, \Omega)$  für  $k, m > 1$  übertragen, indem  $\|\varphi_j\|_{k, \infty}$  abzuschätzen ist.

Für  $\Omega := (0, a)$  ( $n = 1$ ) erhält man so aus der Darstellung (3.30) bzw. aus der Darstellung von  $u$  zu  $u_0 + b$  gemäß (2.9) (vergl. S. 87):

$$(3.41) \quad D_1(1, \Omega) \leq \sqrt{\frac{a}{3}}$$

$$(3.42) \quad D_2(2, \Omega) \leq \sqrt{\frac{a}{45}} \left( a + \frac{a^2}{\sqrt{3}} \right)$$

$$(3.43) \quad D_3(2, \Omega) \leq \sqrt{\frac{a}{3}} \left( 1 + \frac{a^2}{\sqrt{280}} \right)$$

Für den mehrdimensionalen Fall ist diese Methode jedoch kaum praktikabel.

## K A P I T E L   I V

### Ein eindimensionales Beispiel

Im eindimensionalen Fall sind z.B. für  $m = 1$ , d.h.  $L = -\frac{d^2}{dt^2}$  nach Satz 3, Kapitel II im Bilinearteil die Produkte  $x^2$ ,  $\dot{x}^2$ ,  $x\ddot{x}$  und  $\dot{x}\ddot{x}$  zugelassen ( $x$  bezeichne hier die Funktion, der Punkt die Ableitung nach der unabhängigen Variablen  $t$ ). Zur Erläuterung und Diskussion des in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen Verfahrens betrachten wir ein solches eindimensionales Randwertproblem (RWP), wo  $Lx := -\ddot{x}$  und  $B(x,y) := xy$  ( $x,y$  geeignete Funktionen).

Es werden zunächst die Voraussetzungen I - IV aus Kapitel I für das in Kapitel II angegebene Setting aufgezeigt und gemäß Kapitel III die zugehörigen Konstanten bestimmt. Hierbei kann dem Vorzeichen des Parameters  $\lambda$  Rechnung getragen werden.

Die ersten Näherungen der verschiedenen Iterationsverfahren lassen sich jeweils leicht bestimmen, da sie aus linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten resultieren. So läßt sich auch noch die 1. TV-Näherung analytisch angeben, während vergleichsweise für die 2. NV-Näherung bereits die Lösung einer Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten erforderlich ist. Für das in Kapitel I beschriebene Einbettungsverfahren wurde die Lösung bei jedem Schritt mit dem NV numerisch durch Diskretisierung bestimmt.

Mit Hilfe elliptischer Integrale läßt sich eine implizite Lösungsdarstellung für das Randwertproblem gewinnen. Man erhält zwei Lösungen für  $\lambda \in (0, \infty)$  und  $\lambda \in (\lambda_K, 0)$  mit einem kritischen Wert  $\lambda_K \doteq -2.4206$ ; für  $\lambda = \lambda_K$  existiert wie für  $\lambda = 0$  genau eine und für  $\lambda < \lambda_K$  keine Lösung. Ausgehend von  $\lambda = 0$  erreicht man mit dem Einbettungsverfahren naturgemäß nur solche Lösungen, die auf dem zugehörigen "Lösungsweig" liegen. Auch wenn das Einbettungsverfahren selbst für den Fall  $\lambda > 0$  einem endlichen Parameterwert zustrebt, ist sein Ergebnis als "problemspezifisch" einzustufen. Dies gilt auch für die theoretisch gewonnenen lokalen Eindeutigkeitsaussagen und Fehlerschranken.

Da man die Greensche Funktion zum zugehörigen linearen RWP kennt (vergl. Kapitel III, S. 99), ist es zweckmäßig, anstelle des RWP die

hierzu äquivalente Integralgleichung für theoretische Untersuchungen heranzuziehen. Auf diese lassen sich wiederum die Sätze aus Kapitel I anwenden, wobei der zugehörige Operator als Abbildung eines Banachraumes  $(X, \|\cdot\|)$  in sich aufgefaßt werden kann. Im Vergleich zu oben bringt dies hinsichtlich des Parameters  $\lambda$  bei "C-Setting" ( $X := C[0,1]$  und  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{0,\infty}$ ) einen kleineren und bei "L<sup>2</sup>-Setting" ( $X := L^2(0,1)$  und  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{0,2}$ ) einen größeren Wert für  $\lambda^+$  (vergl. I.(4.37)); die Aussagekraft der Konvergenzsätze aus Kapitel I ist in beiden Fällen schwächer als bei Betrachtung des RWP.

### 1. Die Voraussetzungen und Abschätzungen

Wir betrachten für  $\lambda \in \mathbb{F}$  das RWP:

$$(1.1) \quad \forall t \in (0,1): -\ddot{x}(t) + \lambda x^2(t) = 0$$

$$(1.2) \quad x(0) = x(1) = 1$$

In bezug auf die vorangegangenen Kapitel setzen wir  $n := m := 1$  und

$$(1.3) \quad \Omega := (0,1); \quad X := H^{2,2}(0,1); \quad Y := L^2(0,1); \\ U := H_0^{1,2}(0,1) \cap H^{2,2}(0,1)$$

$$(1.4) \quad Lx := -\ddot{x} \quad \text{und} \quad B(x,y) := x \cdot y \quad \text{für} \quad x,y \in X.$$

Nach Kapitel II, Satz 3 (S. 68) sind die Voraussetzungen I bis IV aus Kapitel I (S. 6-7) mit  $x_M := 1$  erfüllt. Insbesondere gilt bezüglich der Konstanten  $\beta$  und  $\gamma$  aus IV für  $x \in X$  und  $u,v \in U$  bei Zugrundelegung der induzierten Norm:

$$\|B(x,u)\| = \|xu\|_{0,2} \leq \|x\|_{0,\infty} \|u\|_{0,2} \leq \|x\|_{0,\infty} C_0 \|u\|_L \\ \|B(u,v)\| = \|uv\|_{0,2} \leq \|u\|_{0,\infty} \|v\|_{0,2} \leq D_0 C_0 \|u\|_L \|v\|_L$$

Hierbei ist  $C_0 := C_0(1,\Omega)$  und  $D_0 := D_0(1,\Omega)$ . Bei der Abschätzung wurde benutzt, daß  $x \in X$  nach Einbettung (i) auch Element von  $L^\infty(\Omega)$  ist und für  $u \in U$   $\|u\|_{0,2}$  über  $C_0(1,\Omega)$  und  $\|u\|_{0,\infty}$  über  $D_0(1,\Omega)$  durch  $\|u\|_{0,2} = \|u\|_L$  abgeschätzt wird. Mit den Werten aus Tabelle 1, Anhang I, erhalten wir somit:

$$(1.5) \quad \beta = C_0 \|x\|_{0,\infty} = \frac{1}{\pi^2} \|x\|_{0,\infty} \quad (\beta = \beta(x) \text{ gemäß IV.a})$$

$$(1.6) \quad \gamma = D_0 C_0 = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{48}}$$

Für die mit  $x_M = 1$  transformierte Gleichung bzw. den in Kapitel I (S. 11) definierten Operator  $F: U \rightarrow Y$  gilt:

$$(1.7) \quad F(u) = -\ddot{u} + \lambda(1+u)^2 = 0$$

Nach Satz 1.a, Kapitel I (S. 14) und (1.5) folgt die Existenz der Inversen von  $F'_\lambda[u]$  für  $|\lambda| \cdot \|1+u\|_{0,\infty} < \frac{\pi^2}{2}$ . Speziell erhalten wir dabei für  $u := 0$ :

$$(1.8) \quad \|f_{0,\lambda}^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{2} |\lambda|} \quad \text{für } |\lambda| < \frac{\pi^2}{2} \quad (f_{0,\lambda} := F'_\lambda[0])$$

In der Tat ist für  $\lambda := -\frac{\pi^2}{2}$  die Ableitung bei Null nicht invertierbar, weil

$$(1.9) \quad F'[0]v = -\ddot{v} + 2\lambda v = 0 \quad \text{für } v(t) := \sin \pi t \in U \quad \text{und } \lambda := -\frac{\pi^2}{2}.$$

Mit  $x_M = 1$  ( $u_0 = 0$ ) als Lösung des Problems zum Parameterwert Null erhalten wir für  $\lambda^+$  gemäß Folgerung 1 zu Satz 5, Kapitel I (S. 39):

$$(1.10) \quad \lambda^+ = \frac{1}{2(\beta + \sqrt{\alpha\gamma})} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{1 + \frac{\pi}{4\sqrt{48}}} \doteq 2.2497$$

$$(\beta \text{ nach (1.5); } \gamma \text{ nach (1.6); } \alpha = \|x_M^2\|_{0,2} = 1)$$

Allerdings ist diese erste Einschränkung des Parameterbereiches für den Fall  $\lambda > 0$  unangemessen. Den günstigeren Verhältnissen für  $\lambda > 0$  können wir mit Hilfe von Satz 1.b (S. 14) entsprechen, indem für  $u \in U$ ,  $x \in X$  und  $a > 0$ :

$$\begin{aligned} - (Lu, B(x, u))_0 &= (\ddot{u}, xu)_0 = a(\ddot{u}, u)_0 + (\ddot{u}, [x-a]u)_0 \\ &= -a\|\ddot{u}\|_{0,2}^2 + (\ddot{u}, [x-a]u)_0 \\ \text{III. (1.10)} \quad &\leq -a\|\ddot{u}\|_{0,2}^2 + \|\ddot{u}\|_{0,2} \|x-a\|_{0,\infty} \|u\|_{0,2} \\ &\leq -a\|\ddot{u}\|_{0,2}^2 + \frac{\|x-a\|_{0,\infty}}{\pi} \|\ddot{u}\|_{0,2} \|\ddot{u}\|_{0,2} \\ \text{III. (1.20)} \quad &= \frac{\|x-a\|_{0,\infty}^2}{4\pi^2 a} \|\ddot{u}\|_{0,2}^2 - \left[ \frac{\|x-a\|_{0,\infty}}{2\pi\sqrt{a}} \|\ddot{u}\|_{0,2} - \sqrt{a} \|\ddot{u}\|_{0,2} \right]^2 \\ &\leq \frac{\|x-a\|_{0,\infty}^2}{4\pi^2 a} \|\ddot{u}\|_{0,2}^2 \end{aligned}$$

Zu vorgegebenem  $x \in X$  bestimmen wir  $a > 0$  also derart, daß  $\frac{\|x-a\|_{0,\infty}}{\sqrt{a}}$  minimal ist, und setzen

$$(1.11) \quad \beta^* := \frac{\|x-a\|_{0,\infty}^2}{4\pi^2 a}.$$

Speziell ist für  $x := x_M := 1$  mit  $a := 1$   $\beta^* = 0$  und damit

$$(1.12) \quad \|f_{0,\lambda}^{-1}\| \leq 1 \quad (\text{für alle } \lambda > 0)$$

Als erstes einschränkendes Intervall für  $\lambda \geq 0$  erhalten wir hiermit im Vergleich zu (1.10)  $[0, \lambda_1^*]$  mit

$$(1.13) \quad \lambda_1^* := \frac{1}{2(\beta^* + \sqrt{\alpha\gamma})} = \frac{1}{2} \pi \sqrt[4]{48} \doteq 4.1346$$

#### Anmerkung

Die obigen Überlegungen ergeben für den Fall  $\lambda < 0$  durch Übergang von  $B$  zu  $-B$  (vergl. Bemerkung 4, S. 16)  $\beta^* = \frac{\|x+a\|_{0,\infty}}{4\pi^2 a}$  mit  $a > 0$ , was aber z.B. für  $x := 1$  auf  $\beta^* = \beta = \frac{1}{\pi^2}$  führt. Da eine vorteilhafte Verwendung von  $\beta^*$  anstelle von  $\beta$  in diesem Beispiel für den Fall  $\lambda > 0$  spezifisch ist, kennzeichnen wir im folgenden auch den Parameter durch \*, um den Fall  $\lambda > 0$  anzuzeigen.

Nach den Sätzen aus Kapitel I ist für  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_1^*]$  mit  $\lambda_1 := -\lambda^+$  die Existenz und lokale Eindeutigkeit einer Lösung von (1.1) - (1.2) zunächst in  $H^{2,2}(0,1)$  und die Konvergenz der Iterationsverfahren im Sinne der Norm aus  $H^{2,2}(0,1)$  (genauer: der induzierten Norm) gesichert. Nach der Einbettung (i) ist die Lösung als Element von  $C^1[0,1]$  anzusehen. Aufgrund von (1.1) ist sie damit aber beliebig oft stetig differenzierbar. Letzteres gilt aus entsprechenden Gründen ebenso für die Näherungen aus den Iterationsverfahren. Man hätte von daher auch  $X := C^2[0,1]$ ,  $U := \{u \in C^2[0,1] | u(0) = u(1) = 0\}$  und  $Y := C[0,1]$  setzen können.

Die Betrachtung der Sobolev-Räume gemäß (1.3) hat in diesem Beispiel lediglich theoretische Bedeutung, indem diese bei der vorgenommenen Normierung vollständig sind.

## 2. Die verschiedenen Iterationsverfahren

Die in Kapitel I, Abschnitt 3, betrachteten Iterationsverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von  $F$  haben hier ausgehend von  $u_0 := 0$  folgende Form:

$$\underline{\text{SA:}} \quad -\ddot{u}_n = -\lambda(1+u_{n-1})^2$$

$$\underline{\text{NV1:}} \quad -\ddot{u}_n + 2\lambda(1+u_0)u_n = -\lambda(1+u_{n-1})^2$$

$$\underline{\text{NV:}} \quad -\ddot{u}_n + 2\lambda(1+u_{n-1})u_n = -\lambda(1+u_{n-1})^2$$

$$\underline{\text{TV:}} \quad u_n = u_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1}, \text{ wobei}$$

$$-\ddot{c}_{n-1} + 2\lambda(1+u_{n-1})c_{n-1} = -\lambda(1+u_{n-1})^2$$

$$-\ddot{d}_{n-1} + 2\lambda(1+u_{n-1})d_{n-1} = -\lambda c_{n-1}^2$$

$$\underline{\text{BIL1:}} \quad -\ddot{u}_n + \lambda(1+u_{n-1})u_n = -\lambda(1+u_{n-1})$$

$$\underline{\text{BIL2:}} \quad -\ddot{u}_n + 2\lambda u_n + \lambda u_{n-1} u_n = -\lambda$$

Die Berechnung von  $u_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  läuft damit jeweils auf die Lösung eines linearen RWP hinaus, wobei wegen  $u_n \in U$  homogene Randwerte bei  $t = 0$  und  $t = 1$  vorgeschrieben werden. Für  $u_0 := 0$  ( $x_M := 1$ ) erhalten wir beim 1. Iterationsschritt lediglich Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Diese lassen sich mit den üblichen Methoden integrieren. Wir erhalten für  $\lambda < 0$  ( $|\lambda|$  nach oben beschränkt gemäß (1.10) und (1.13)) als erste Näherungen:

$$\underline{\text{SA:}} \quad u_1(t) = -\frac{1}{2}\lambda t(1-t)$$

$$\underline{\text{NV1:}} \quad u_1(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1-\cos \mu}{\sin \mu} \sin \mu t + \cos \mu t - 1 \right] \text{ mit } \mu := \sqrt{2|\lambda|}$$

$$\underline{\text{NV:}} \quad u_1 \text{ wie bei NV1}$$

$$\underline{\text{TV:}} \quad u_1(t) = (a+bt)\sin \mu t + (c+dt)\cos \mu t + e \sin 2\mu t + f \cos 2\mu t + g$$

$$\text{mit } a := \frac{p}{2} - \frac{\mu}{16} + \frac{\cos \mu}{\sin \mu} \left( \frac{p\mu}{16} - \frac{2+p^2}{12} \right) + \frac{3+p^2}{16 \sin \mu} - \frac{(1-p^2)\cos 2\mu + 2p \sin 2\mu}{48 \sin \mu}$$

$$b := \frac{\mu}{16}, \quad c := \frac{8+p^2}{12}, \quad d := \frac{p\mu}{18}, \quad e := \frac{p}{24}, \quad f := \frac{1-p^2}{48},$$

$$g := -\frac{11+p^2}{16}, \quad p := \frac{1-\cos \mu}{\sin \mu}, \quad \mu := \sqrt{2|\lambda|}$$

$$\underline{\text{BIL1:}} \quad u_1(t) = \frac{1-\cos \eta}{\sin \eta} \sin \eta t + \cos \eta t - 1 \text{ mit } \eta := \sqrt{|\lambda|}$$

$$\underline{\text{BIL2:}} \quad u_1 \text{ wie bei NV1}$$

Die entsprechende Näherung für die gesuchte Lösung des Problems ergibt sich jeweils durch  $x_1 = u_1 + x_M = u_1 + 1$ . Für  $\lambda > 0$  sind lediglich sin und cos gegen die Hyperbelfunktionen sinh und cosh auszutauschen.

Es sei betont, daß bereits für die 2. NV-Näherung eine Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten zu lösen ist. Es besteht hier deshalb ein wesentlicher Unterschied hinsichtlich Aufwand und Möglichkeiten zwischen der Berechnung von  $u_2^{NV}$  und  $u_1^{TV}$ , indem wir für  $u_1^{TV}$  noch eine relativ überschaubare analytische Darstellung gewinnen konnten. Dies liegt natürlich an der einfachen Form von  $x_M$ . Allgemein wird man im Eindimensionalen, wenn apriori nichts bekannt ist, als  $x_M$  die Verbindungsgerade der Randpunkte wählen; im Mehrdimensionalen zwingen die Randbedingungen  $x_M$  in der Regel eine kompliziertere Gestalt auf, so daß selbst bei formal einfachen Ausgangsproblemen ( $L = (-1)^m \Delta^m$  und keine variable Koeffizienten im Bilinearteil) nur noch das erste Verfahren SA die Erleichterung konstanter Koeffizienten bietet.

Das einschränkende Intervall für  $\lambda$  läßt sich nach Kenntnis von  $u_1^{NV}$  zunächst dadurch verbessern, daß man zur Anwendung des Satzes über das NV  $\|f_0^{-1}F(0)\|_L$  nicht durch Aufspalten der Norm abschätzt, sondern explizit als  $\|u_1^{NV}\|_L$  berechnet (wegen  $u_0 = 0$  ist die "NV-Korrektur"  $c_0^{NV}$  aus I.(3.10) gleich  $u_1^{NV}$ ).

Für  $\zeta := \|u_1^{NV}\|_L = \|\tilde{u}_1^{NV}\|_{0,2}$  erhalten wir im Fall  $\lambda < 0$  ( $\mu := \sqrt{2|\lambda|}$ ):

$$(2.1) \quad \zeta = |\lambda| \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \cos \mu}{\sin \mu} \right)^2 + 1 - \frac{\sin \mu \cos \mu}{\mu} + \frac{2\mu + 4 \sin \mu - \sin 2\mu}{4\mu} \right]^{1/2}$$

Aus der Bedingung  $h := \zeta \kappa K \leq \frac{1}{2}$  mit  $K := \frac{2|\lambda|}{\sqrt{48}\pi^2}$  und  $\kappa := \frac{1}{1 - 2|\lambda|/\pi^2}$  erhalten wir eine transzendente Gleichung für  $|\lambda|$ .

Entsprechendes gilt für  $\lambda > 0$ , wo in (2.1) die Hyperbelfunktionen stehen und  $\kappa := 1$  gesetzt werden kann. Als Einschränkung für  $\lambda$  erhält man daraus:

$$(2.2) \quad \lambda \in [-2.292983, 5.36277897]$$

Dieses Ergebnis wird natürlich bereits durch den auf  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_1^*$  folgenden Einbettungsschritt übertroffen, wenn die zu  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_1^*$  gehörigen Lösungen genügend genau approximiert werden (vergl. die folgende Tabelle). Für das Einbettungsverfahren (vergl. Kapitel I, S. 40) bestimmen wir jeweils die Ausgangsnäherung  $x_{0,N}$  mit den zugehörigen Konstanten  $\alpha_N, \beta_N$  bzw.  $\beta_N^*$  und  $\epsilon_N$  zum N-ten Einbettungsschritt. Eine geeignete Näherung  $x_{0,N}$  gewinnen wir mit dem NV (also  $x_{0,N} = x_{n,N-1}^{NV}, n > 1$ ), wobei das jeweilige lineare RWP durch Diskretisierung gelöst wurde. Bei genügend feiner Zerlegung ist dabei der Diskretisierungsfehler

vernachlässigbar klein und nach 4 bis 5 NV-Schritten im Rahmen der Rechengenauigkeit die exakte Lösung  $x_N^*$  zum Parameterwert  $\lambda_N$  erreicht, so daß  $\varepsilon_N$  nicht ins Gewicht fällt (für die Werte aus der folgenden Tabelle wurde bei der Diskretisierung  $[0,1]$  in 2000 Teile zerlegt; die Rechengenauigkeit war  $10^{-12}$ ; das Ergebnis wurde mit der exakten Lösung aus Abschnitt 3 verglichen). Die Lösung  $x_N^*$  gleicht für  $\lambda_N < 0$  einer nach unten geöffneten Parabel mit dem Scheitelwert  $c_N > 1$  als Maximum und für  $\lambda_N > 0$  einer nach oben geöffneten Parabel mit dem Scheitelwert  $c_N \in (0,1)$  als Minimum (vergl. Abschnitt 3). Für den Fall  $\lambda < 0$  setzen wir deshalb nach (1.10)

$$(2.3) \quad \beta_N := \frac{c_N}{\pi^2}.$$

Für den Fall  $\lambda > 0$  ermitteln wir  $\beta_N^*$  (vergl. Bemerkung 3, S. 43) aus (1.11), wobei jeweils mit  $a := \frac{1}{2}(1+c_N)$  der günstigste Wert erzielt wird, nämlich

$$(2.4) \quad \beta_N^* = \frac{(1-c_N)^2}{8\pi^2(1+c_N)}.$$

Gebremst wird der Einbettungsprozeß erwartungsgemäß dadurch, daß  $2\lambda_N \beta_N$  bzw.  $2\lambda_N^* \beta_N^*$  für  $N \rightarrow \infty$  gegen Eins strebt. Besonders stark macht sich dieser Effekt für  $\lambda < 0$  bemerkbar. Im Fall  $\lambda > 0$  profitiert man stark vom Einsatz der Konstanten  $\beta^*$  anstelle von  $\beta$ ; allerdings zeichnet sich auch hier ein endlicher maximaler Parameter ab ( $\lambda_N^* \rightarrow \infty \Rightarrow c_N \rightarrow 0 \Rightarrow \beta_N^* \rightarrow \frac{1}{8\pi^2}$  im Widerspruch zu  $2\lambda_N^* \beta_N^* < 1$ !).

Das Ergebnis des Einbettungsprozesses wird im wesentlichen durch die folgende Tabelle wiedergegeben:

| N   | $ \lambda_N $ | $2\beta_N  \lambda_N $ | $\lambda_N^*$ | $2\beta_N^* \lambda_N^*$ |
|-----|---------------|------------------------|---------------|--------------------------|
| 1   | 2.249691      | 0.777669               | 4.134568      | 0.00528933               |
| 2   | 2.335202      | 0.867046               | 7.082794      | 0.01740439               |
| 3   | 2.365104      | 0.909290               | 9.433099      | 0.03145118               |
| 4   | 2.378869      | 0.932750               | 11.420187     | 0.0426458                |
| 5   | 2.386386      | 0.947271               | 13.157459     | 0.06030176               |
| 10  | 2.398992      | 0.973348               | 19.708180     | 0.12641776               |
| 20  | 2.403766      | 0.988433               | 27.956282     | 0.23008089               |
| 50  | 2.406060      | 0.995859               | 40.553961     | 0.4184126                |
| 100 | 2.406721      | 0.998024               | 49.96962      | 0.5757989                |
| 500 | 2.407207      | 0.999622               | 65.39461      | 0.85505037               |

### 3. Vergleich mit der exakten Lösung

Die Lösung des RWP (1.1)-(1.2) kann mit Hilfe eines elliptischen Integrals analytisch angegeben werden.

Wir multiplizieren hierzu Gleichung (1.1) mit  $\dot{x}(t)$  und erhalten nach einmaliger Integration:

$$(3.1) \quad \dot{x}^2(t) = \frac{2}{3} \lambda \left[ x^3(t) - c^3 \right] = \frac{2}{3} |\lambda| |x^3(t) - c^3|$$

Hierbei ist die Integrationskonstante  $c$  für  $\lambda < 0$  das Maximum und für  $\lambda > 0$  das Minimum von  $x$ ; dies erhellt daraus, daß wegen (1.2) die Ableitung eine Nullstelle  $t_0$  haben muß und diese wiederum einzige Nullstelle ist, da aufgrund von (1.1) auf dem gesamten Intervall  $\ddot{x}$  das Vorzeichen von  $\lambda$  hat. Für  $t \in [0, t_0]$  hat deshalb  $\dot{x}$  das entgegengesetzte Vorzeichen von  $\lambda$ . Nach Wurzelziehen und nochmaliger Integration folgt für  $t \in [0, t_0]$

$$(3.2) \quad \int_{x(t)}^{x(t_0)} \frac{d\xi}{\sqrt{|\xi^3 - c^3|}} = -\text{sign}(\lambda) \sqrt{\frac{2}{3} |\lambda|} (t_0 - t).$$

Wegen  $x(t_0) = c$  ist das Integral als Grenzwert zu verstehen. Es läßt sich auswerten mit Hilfe des elliptischen Integrals 1. Gattung

$$(3.3) \quad F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad \text{für } k \in [0, 1], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Für  $\lambda < 0$  erhalten wir (siehe z.B. MEYER ZUR KAPELLEN [37], 0.2.2.1):

$$(3.4) \quad \int_{x(t)}^{x(t_0)} \frac{d\xi}{\sqrt{|\xi^3 - c^3|}} = \int_{x(t)}^c \frac{d\xi}{\sqrt{c^3 - \xi^3}} = \frac{1}{\mu} [F(k, \varphi_{x(t)}) - F(k, \varphi_c)]$$

$$\text{mit } \mu := \frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{c}}, \quad k := \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \quad \varphi_x := \arccos \frac{(\sqrt{3}-1)c+x}{(\sqrt{3}+1)c-x}$$

$$\text{für } x \in [1, c] \quad (c = \|x\|_{0,\infty}, \quad x \geq 1)$$

Wegen  $\varphi_c = 0$  folgt

$$(3.5) \quad \frac{1}{\mu} F(k, \varphi_x) = \sqrt{\frac{2}{3} |\lambda|} (t_0 - t).$$

Analog liefert die Integration von  $t_0$  bis  $t \in [t_0, 1]$  unter Beachtung von  $\dot{x} \leq 0$

$$(3.6) \quad \frac{1}{\mu} F(k, \varphi_x) = \sqrt{\frac{2}{3} |\lambda|} (t - t_0).$$

Aus der Gleichheit der Randwerte für  $x$  folgt somit  $t_0 = \frac{1}{2}$ , was auch aus Symmetriegründen klar ist. Wir können nun die Lösung aufgelöst nach  $t$  angeben zu

$$(3.7) \quad \frac{1}{\mu} F(k, \varphi_x) = \sqrt{\frac{2}{3}} |\lambda| \left| \frac{1}{2} - t \right|, \quad t \in [0, 1].$$

Die Abhängigkeit der Konstante  $c$  von  $\lambda$  folgt unter Beachtung von  $x(0) = 1$  zu

$$(3.8) \quad \frac{1}{\mu} F(k, \varphi_1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} |\lambda| \quad \text{bzw.} \quad |\lambda| = \frac{2\sqrt{3}}{c} F^2(k, \varphi_1).$$

Neben (3.7) gewinnen wir daraus die Lösungsdarstellung

$$(3.9) \quad \left| t - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \frac{F(k, \varphi_x)}{F(k, \varphi_1)} \quad \text{mit } k, \varphi_x \quad \text{aus (3.4).}$$

Wir haben damit für  $\lambda < 0$  die Lösung in Abhängigkeit vom Maximum  $c \geq 1$  implizit angegeben. Wie aus der Theorie über RWP dieser Art bekannt ist (siehe LAETSCH [31]), existiert ein kritischer Wert  $\lambda_K < 0$ , so daß für  $\lambda < \lambda_K$  keine Lösung mehr existiert, während für  $\lambda \in (\lambda_K, 0)$  genau zwei Lösungen existieren, nämlich eine mit kleinem und eine mit großem Maximum. Hier erhalten wir aus (3.8)

$$(3.10) \quad \lambda_K \doteq -2.4206.$$

Für  $\lambda > 0$  müssen wir bei der Integration unterscheiden, in welchem Intervall das Minimum  $c$  von  $x$  liegt. Im übrigen verläuft die Rechnung analog zu oben. Wir erhalten

für  $c \in \left( \frac{1}{1+\sqrt{3}}, 1 \right)$ :

$$(3.11) \quad \left| \frac{1}{2} - t \right| = \frac{1}{2} \frac{F(k, \varphi_x)}{F(k, \varphi_1)}, \quad x \in [c, (1+\sqrt{3})c], \quad \text{wobei } k := \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$\varphi_x := \arccos \frac{x - (\sqrt{3}+1)c}{x + (\sqrt{3}-1)c}, \quad \lambda = 2\sqrt{3} \frac{F^2(k, \varphi_1)}{c}$$

für  $c \in \left( 0, \frac{1}{1+\sqrt{3}} \right)$ :

$$(3.12) \quad \left| \frac{1}{2} - t \right| = \begin{cases} \frac{2F(k, \frac{\pi}{2}) - F(k, \varphi_x)}{2F(k, \frac{\pi}{2}) - F(k, \varphi_1)} & \text{für } x \in [(1+\sqrt{3})c, 1] \\ \frac{F(k, \varphi_x)}{2F(k, \frac{\pi}{2}) - F(k, \varphi_1)} & \text{für } x \in [c, (1+\sqrt{3})c] \end{cases}$$

$$\text{wobei } k := \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{3}}, \varphi_x := \arccos \left| \frac{x-(\sqrt{3}+1)c}{x+(\sqrt{3}-1)c} \right|$$

$$\lambda = 2\sqrt{3} \frac{[2F(k, \frac{\pi}{2}) - F(k, \varphi_1)]^2}{c}$$

für  $c \in (\frac{1}{1-\sqrt{3}}, 0)$ :

$$(3.13) \quad \left| \frac{1}{2} - t \right| = \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{2F(k, \frac{\pi}{2}) - F(k, \varphi_x)}{2F(k, \frac{\pi}{2}) - F(k, \varphi_1)} & \text{für } x \in [(\sqrt{3}-1)c, 1] \\ \frac{F(k, \varphi_x)}{2F(k, \frac{\pi}{2}) - F(k, \varphi_1)} & \text{für } x \in [c, (\sqrt{3}-1)c] \end{cases}$$

$$\text{wobei } k := \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{3}}, \varphi_x := \arccos \left| \frac{(\sqrt{3}-1)|c|-x}{(\sqrt{3}+1)|c|+x} \right|$$

$$\lambda = 2\sqrt{3} \frac{[2F(k, \frac{\pi}{2}) - F(k, \varphi_1)]^2}{|c|}$$

für  $c \in (-\infty, \frac{1}{1-\sqrt{3}})$ :

$$(3.14) \quad \left| \frac{1}{2} - t \right| = \frac{1}{2} \frac{F(k, \varphi_x)}{F(k, \varphi_1)}, \text{ wobei } x \in (-\infty, (1-\sqrt{3})c]$$

$$k := \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{3}}, \varphi_x := \arccos \frac{(\sqrt{3}-1)|c|-x}{(\sqrt{3}+1)|c|+x}$$

$$\lambda = 2\sqrt{3} \frac{F^2(k, \varphi_1)}{|c|}$$

Aus (3.11) bis (3.14) resultieren für jedes  $\lambda > 0$  genau zwei Lösungen, eine mit positivem und eine mit negativem Minimum. (Der Fall  $\lambda > 0$  ist bei den Untersuchungen von LAETSCH [31] nicht erfaßt.)

Figur 1, S. 117, gibt einen vollständigen Überblick über Existenz und lokale Eindeutigkeit der Lösungen in Abhängigkeit von  $\lambda$ . Durch Abtragen von  $c = x(\frac{1}{2})$  gegen  $\lambda$  wird hierbei zugleich der qualitative Verlauf der Lösungen klar, da diese auf dem gesamten Definitionsbereich entweder negativ oder positiv gekrümmt sind, am Rand (d.h. bei  $t = 0$  und  $t = 1$ ) den Wert Eins besitzen, symmetrisch um  $t = \frac{1}{2}$  liegen und dort ihr Maximum bzw. Minimum mit dem Wert  $c$  annehmen (vergl. auch Figur 2 und 3). Insofern zeigt die Lösung mit dem Scheitelwert  $c$  das gleiche Verhalten wie die Parabel

$$(3.15) \quad p(t) := 1 - 4(1-c)t(1-t).$$

Durch den Start mit  $x_M = 1$  erreicht unser Verfahren höchstens die Lösungen, die auf diesem Lösungszweig liegen, also für  $\lambda < 0$  die mit niedrigem Maximum und für  $\lambda > 0$  die mit positivem Minimum. Man sieht, daß das Ergebnis aus dem Einbettungsverfahren im wesentlichen den tatsächlichen Gegebenheiten nahekomm, auch wenn für  $\lambda < 0$  der kritische Wert  $\lambda_K$  nicht ganz erreicht wird und sich auch für  $\lambda > 0$  eine endliche Grenze ergibt (vergl. Abschnitt 2). Bei diesem Vergleich ist in Rechnung zu stellen, daß die Sätze aus Kapitel I, Abschnitt 4, mehr als die bloße Existenz einer Lösung aussagen. Eine Beschränkung ist indirekt auch vom Einzugsbereich für die Konvergenz der Iterationsverfahren (bis 3. Ordnung) und von der theoretisch mitgelieferten Eindeutigkeitsaussage her zu verstehen. Zur Einschätzung der Eindeutigkeitsaussage ist  $r_+$  (siehe Satz 4 (B2), Kapitel I, S. 30) mit  $\|\ddot{x}_M - \ddot{x}^*(\lambda)\|_{0,2}$  zu vergleichen, wobei wir mit  $\ddot{x}^*(\lambda)$  die Lösung des Problems zum Parameter  $\lambda$  bezeichnen, die nicht auf dem durch das Verfahren berührten Lösungszweig liegt; im Gegensatz hierzu bezeichne  $x^*(\lambda)$  die approximierte Lösung. Beim N-ten Einbettungsschritt ist  $x_M := x_{N-1}^* := x^*(\lambda_{N-1})$  und  $\lambda \in [\lambda_N, \lambda_{N-1}]$  (für  $\lambda < 0$ ) bzw.  $\lambda \in [\lambda_{N-1}, \lambda_N]$  (für  $\lambda > 0$ ). Sind  $c_{N-1}$  und  $\bar{c}(\lambda)$  die zu  $x_{N-1}^*$  bzw.  $\ddot{x}^*(\lambda)$  gehörigen Scheitelwerte, so gilt

$$(3.16) \quad \|\ddot{x}_{N-1}^* - \ddot{x}^*(\lambda)\|_{0,2} \approx 8 |c_{N-1} - \bar{c}(\lambda)|, \text{ womit:}$$

$$\ddot{x}^*(\lambda) \neq x^*(\lambda) \Rightarrow \|\ddot{x}_{N-1} - \ddot{x}^*(\lambda)\|_{0,2} > r_+(\lambda) \Rightarrow \quad (3.16)$$

$$c_{N-1} + \frac{r_+(\lambda)}{8} < \bar{c}(\lambda) \quad \text{im Fall } \lambda < 0$$

$$c_{N-1} - \frac{r_+(\lambda)}{8} > \bar{c}(\lambda) \quad \text{im Fall } \lambda > 0$$

Der Vergleich von  $\bar{c}(\lambda)$  (für  $\lambda < 0$  oberer und für  $\lambda > 0$  unterer Lösungszweig in Figur 1) mit  $c_{N-1} \pm \frac{1}{8} r_+(\lambda)$  (gestrichelte Kurven in Figur 1) gibt deshalb einen direkten Vergleich zwischen tatsächlichem und dem zum N-ten Einbettungsschritt theoretisch gesicherten Eindeutigkeitsbereich für  $x^*(\lambda)$  als Umgebung des Startwerts  $x_M = x_{N-1}^*$ . Beim jeweiligen Einbettungsschritt ist z.B. im Fall  $\lambda > 0$   $r_+$  als Funktion von  $\lambda \in [\lambda_{N-1}^*, \lambda_N^*]$  erklärt. Allerdings behält  $r_+$  auch für  $\lambda < \lambda_{N-1}^*$  die entsprechende Bedeutung, solange die Größe  $h$  aus (V3) Satz 4, Kapitel I, S. 33, mit  $\xi := |\lambda - \lambda_{N-1}^*| \alpha_{N-1}$  den Wert  $\frac{1}{2}$  nicht überschreitet (vergl. Beweise zu Satz 4 und 5); man beachte, daß sich für größere  $N$

jeweils eine untere Schranke größer als Null ergibt (vergl. die Kurve für  $r_+$  zu  $N = 5$ ; die ersten vier Kurven gehen für  $\lambda \rightarrow 0$  asymptotisch in die Hyperbel  $\frac{1}{\gamma\lambda}$  über). Im übrigen zeigt das rechte Ende der  $N$ -ten Kurve für  $r_+$  den jeweils erreichten Maximalwert  $\lambda_N^*$  an.

Für  $\lambda < 0$  wird der Existenz- und Eindeutigkeitsbereich bereits beim ersten Einbettungsschritt weitgehend ausgeschöpft (aus optischen Gründen ist deshalb hier nur dieser erste Schritt in Figur 1 wiedergegeben).

Figur 2 und 3 zeigen die exakte Lösung (des transformierten Problems) zusammen mit den verschiedenen ersten Näherungen aus Abschnitt 2 für  $\lambda := -1$  und  $\lambda := -\lambda^+ = -2.24969$ . In Figur 3 ist überdies die Parabel aus (3.15) eingezeichnet (gestrichelte Kurve). Die exakte Lösung wird durch die Iterationsverfahren "von unten her" approximiert. Dies basiert auf gewisse Monotonieeigenschaften des Differentialoperators, auf deren Ausnutzung jedoch hier verzichtet wurde (vergl. COLLATZ [14], § 23). Klar zu erkennen ist die unterschiedliche Qualität der Näherungen in Abhängigkeit von  $\lambda$  und vom verwendeten Iterationsverfahren. Insbesondere ist für  $\lambda := -1$  die erste TV-Näherung von der exakten Lösung in der Figur nicht unterscheidbar (sie ist hier auch genauer als die Parabel aus (3.15), deren maximale Abweichung etwa Strichdicke ausmachen würde und deshalb nicht eingezeichnet ist).

Figur 4 zeigt den relativen Fehler der ersten Näherungen bezüglich der Supremumsnorm in Abhängigkeit von  $\lambda \in [\lambda_1, 0]$ ,  $\lambda_1 = -2.24969$ . Aufgetragen gegen  $|\lambda|$  ist die Anzahl der richtigen Stellen, d.h.

$$(3.17) \quad -10 \log \frac{\|x^*(\lambda) - x_1(\lambda)\|_{0,\infty}}{\|x^*(\lambda)\|_{0,\infty}},$$

wobei  $x_1(\lambda)$  für die erste Näherung von  $x^*(\lambda)$  steht, und zwar für SA, BIL1, NV und TV. Für SA, NV und TV ist zum Vergleich die Fehlerabschätzung aufgezeichnet, die sich nach Satz 4, Kapitel I, S. 31, für die verschiedenen Verfahren ergibt (für TV zwei Möglichkeiten).

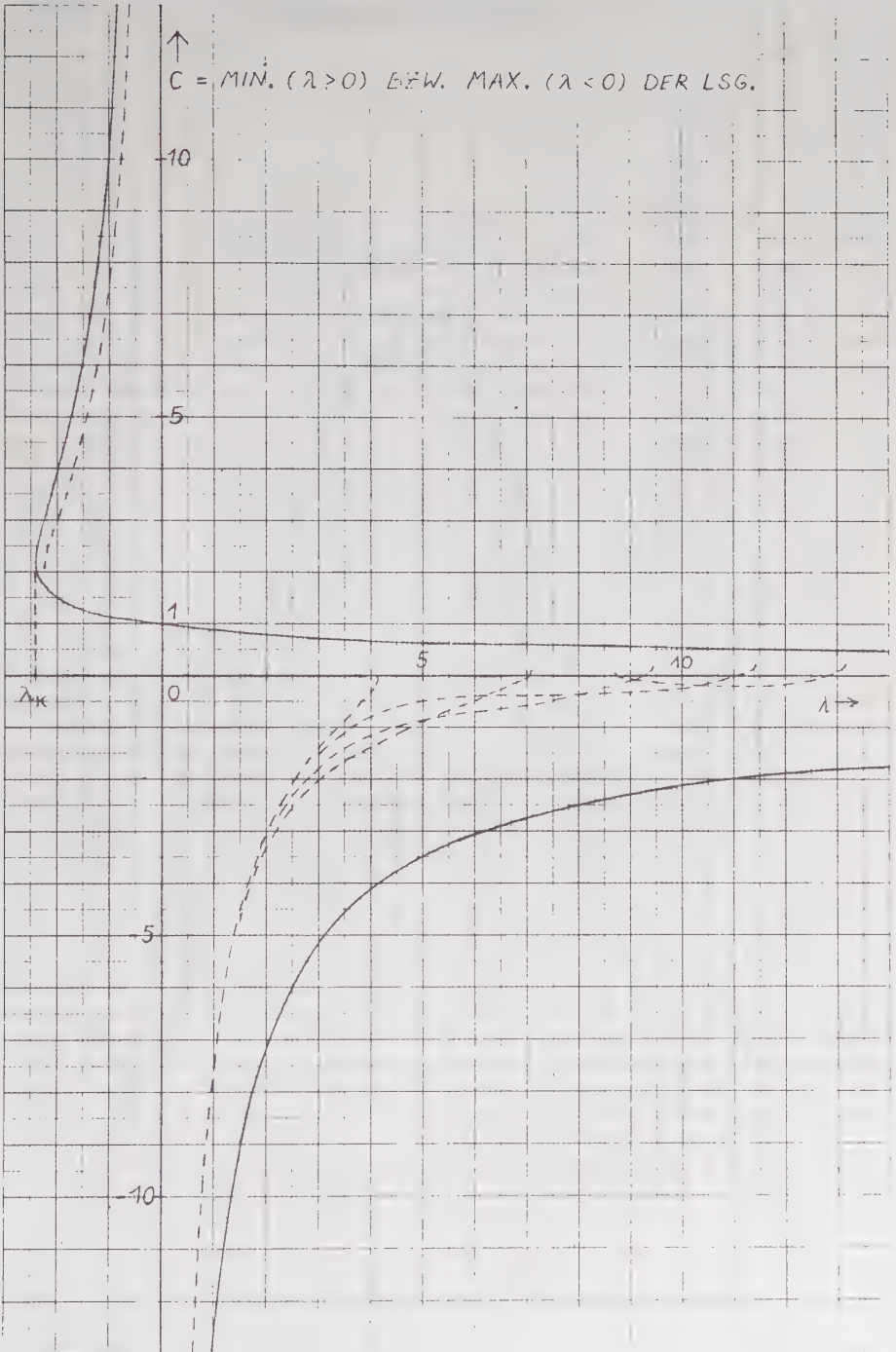
Zu beachten ist, daß sich die Werte in der Tabelle wegen der gewählten Normierung auf die  $L^2$ -Norm der zweiten Ableitung beziehen. Über

$$(3.18) \quad \|x^* - x_1\|_{0,\infty} \leq D_0 \|\ddot{x}^* - \ddot{x}_1\|_{0,2} \quad \text{mit} \quad D_0 = \frac{1}{\sqrt{48}}$$

gewinnen wir eine Abschätzung, die mit dem durch (3.17) angegebenen exakten Fehler vergleichbar ist. Man sieht, daß besonders für betragsmäßig kleine  $\lambda$ -Werte der wahre Fehler durch die Abschätzung sehr gut

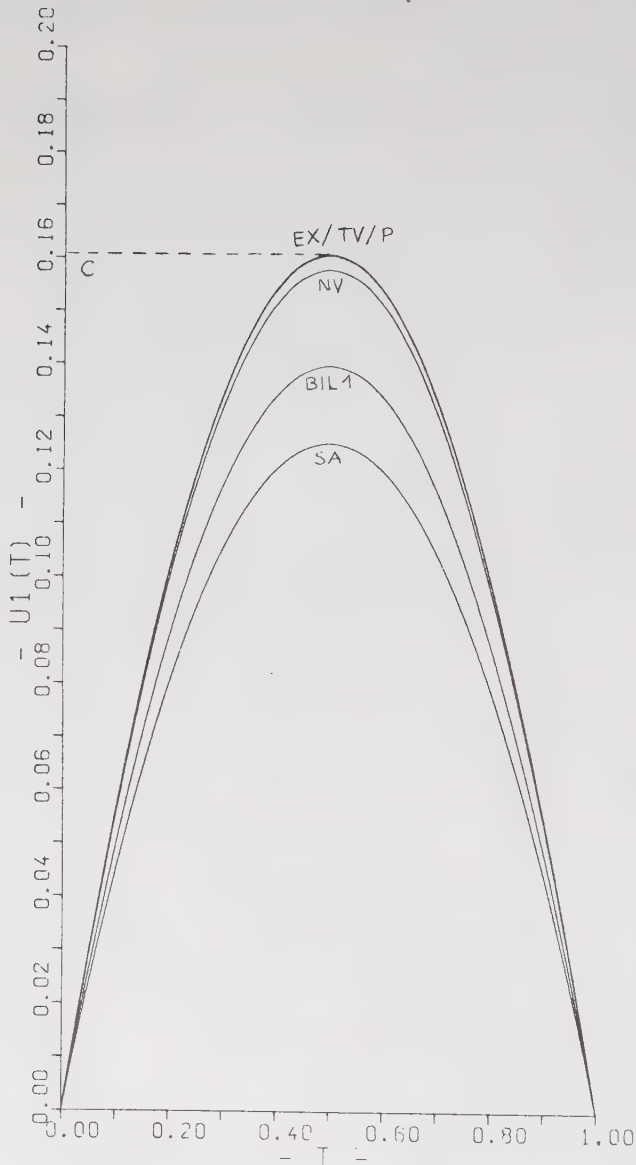
Figur 1

Lösungswege und Eindeutigkeitsbereiche



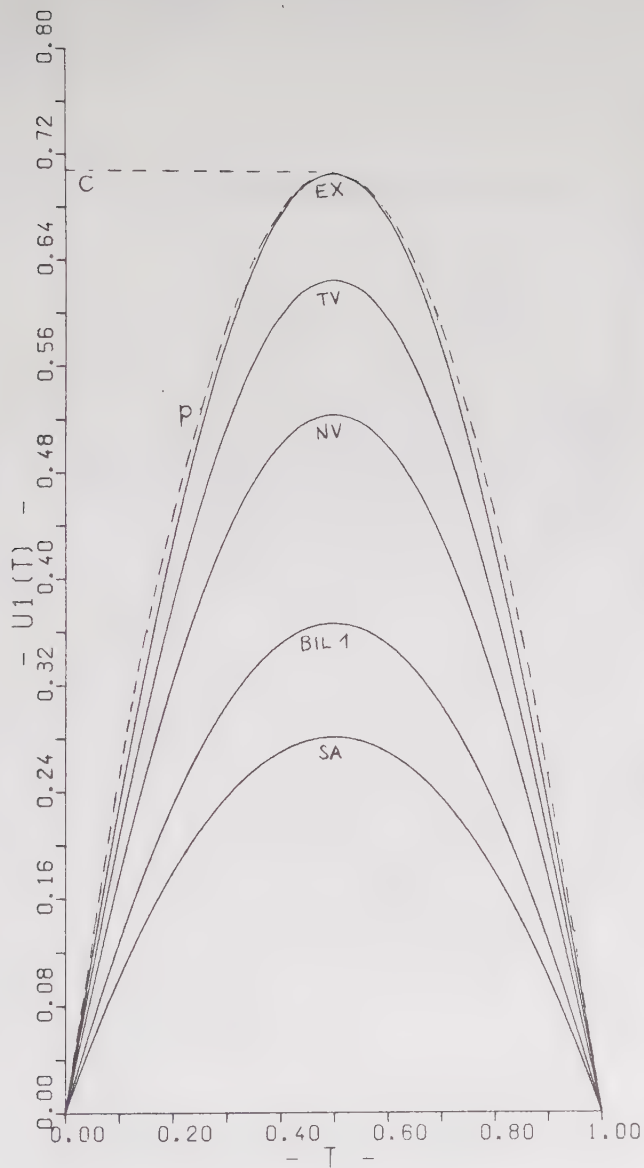
Figur 2

1. Näherungen zu  $\lambda = -1$



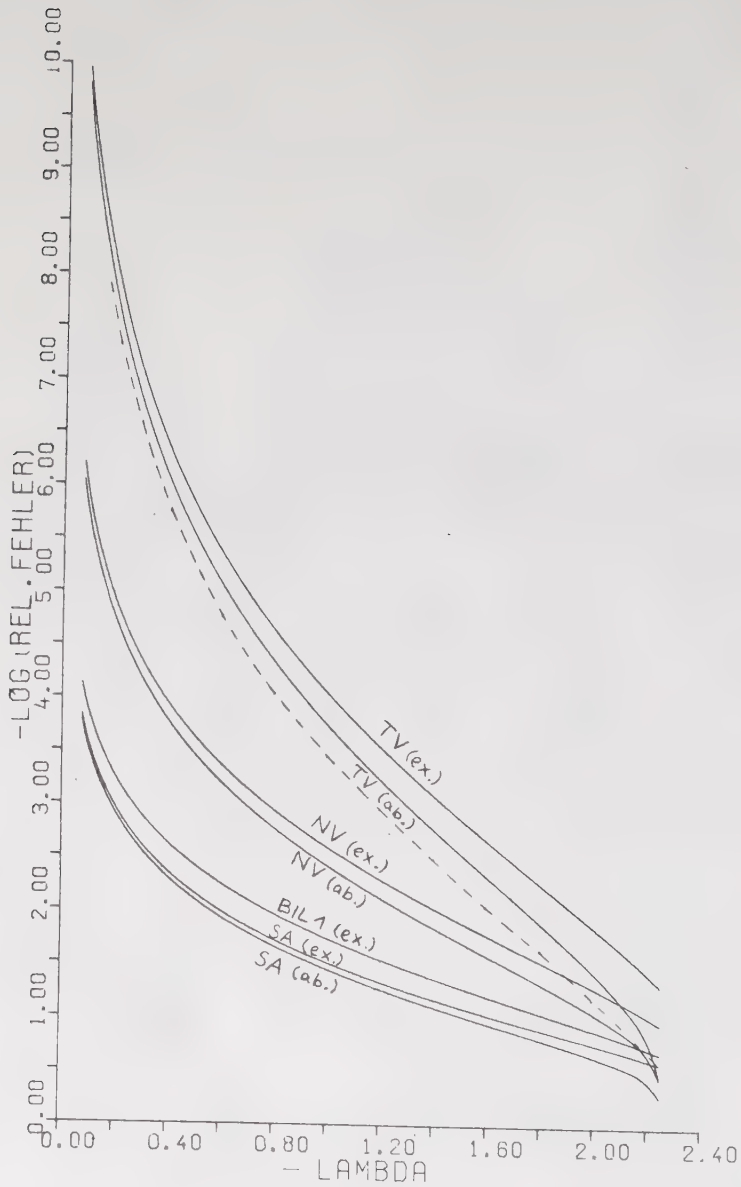
Figur 3

1. Näherungen zu  $\lambda = -2.2497$



Figur 4

Exakter Fehler und apriori-Fehlerabschätzung  
in Abhängigkeit von  $\lambda \in (-\lambda^+, 0)$



wiedergegeben wird. Entsprechend der Bedeutung von  $\lambda_1$  als Maximalwert beim ersten Einbettungsschritt knicken die Kurven aus der Fehlerabschätzung in der Nähe von  $\lambda_1$  nach unten ab. Ein besseres Resultat hinsichtlich dieses Bereichs erzielt man natürlich mit dem zweiten Einbettungsschritt.

#### 4. Betrachtung der äquivalenten Integralgleichung

Bekanntlich ist das RWP (1.1)-(1.2) äquivalent zur Integralgleichung

$$(4.1) \quad x(s) + \lambda \int_0^1 G(s,t)x^2(t)dt = 1, \quad s \in [0,1]; \quad \lambda \in \mathbb{F}$$

$$\text{mit } G(s,t) := \begin{cases} s(1-t) & \text{für } 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t(1-s) & \text{für } 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Hierauf lassen sich ebenfalls die in Kapitel I bereitgestellten Methoden anwenden, wobei man einfachheitshalber  $M = X$  und  $X := U := Y := C[0,1]$  mit  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{0,\infty}$  setzen kann.

$L$  steht nun für die Identität, während die bilineare Abbildung  $B$  erklärt ist durch:

$$(4.2) \quad \forall x,y \in C[0,1], \quad s \in [0,1]: \quad [B(x,y)](s) := \int_0^1 G(s,t)x(t)y(t)dt$$

Für die benötigten Konstanten gilt:

$$(4.3) \quad \alpha = \|B(x,x)\| = \max_{s \in [0,1]} \int_0^1 |G(s,t)x^2(t)|dt, \quad x \in C[0,1]$$

$$\beta = \|B(x,\cdot)\| = \max_{s \in [0,1]} \int_0^1 |G(s,t)x(t)|dt, \quad x \in C[0,1]$$

$$\gamma = \|B\| = \max_{s \in [0,1]} \int_0^1 |G(s,t)|dt$$

Ausgehend von  $x_0 := 1$ , wofür  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{8}$ , erhalten wir somit im Vergleich zu (1.10)

$$(4.4) \quad \lambda^+ = 2.$$

Allerdings entspricht der Betrachtungsweise für das Randwertproblem die Alternative  $X := U := Y := L^2(0,1)$  mit  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{0,2}$ . Hierbei erhalten wir mit  $x,y \in X$ :

$$\begin{aligned}
 \|B(x, y)\|^2 &= \int_0^1 \left( \int_0^1 G(s, t) x(t) y(t) dt \right)^2 ds \\
 &\leq \int_0^1 \left( \int_0^1 G^2(s, t) x^2(t) dt \right) \left( \int_0^1 y^2(t) dt \right) ds \\
 &= \left[ \int_0^1 \left( \int_0^1 G^2(s, t) ds \right) x^2(t) dt \right] \left[ \int_0^1 y^2(t) dt \right] \\
 &\leq \left( \max_{t \in [0, 1]} \int_0^1 G^2(s, t) ds \right) \left( \int_0^1 x^2(t) dt \right) \left( \int_0^1 y^2(t) dt \right)
 \end{aligned}$$

Aus diesen Beziehungen folgern wir:

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad \alpha &= \left[ \int_0^1 \left( \int_0^1 G(s, t) x^2(t) dt \right)^2 ds \right]^{1/2}, \quad x \in L^2(0, 1) \\
 \beta &= \left[ \int_0^1 \int_0^1 G^2(s, t) x^2(t) dt ds \right]^{1/2}, \quad x \in L^2(0, 1) \\
 \gamma &= \left[ \max_{t \in [0, 1]} \int_0^1 G^2(s, t) ds \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

Nach Kapitel III (3.24), S. 99, ist  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{48}}$ ; für  $x := x_0 := 1$  erhalten wir  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{120}}$  und  $\beta = \frac{1}{\sqrt{90}}$ , womit im Vergleich zu oben

$$(4.5) \quad \gamma^+ = \frac{\sqrt{90} \sqrt[4]{360}}{2\sqrt[4]{360} + \sqrt{90}} \doteq 2.2707$$

Diese Verbesserung gegenüber dem Wert aus (1.10) basiert auf Kenntnis der Greenschen Funktion  $G$  aus (4.1). Diesbezüglich ergeben sich im Mehrdimensionalen große Schwierigkeiten. Ferner verkompliziert sich die Behandlung der Integralgleichung, wenn der Bilinearteil Ableitungen enthält und so das  $L^2$ -Setting nicht mehr ausreicht. Die Behandlung des RWP gemäß Abschnitt 1 ist dagegen zum einen nicht auf die Auswertung der Greenschen Funktion angewiesen und liefert zum anderen auch Aussagen über die relevanten Ableitungen der betrachteten Funktionen. Die Konvergenzsätze aus Kapitel I besitzen dabei eine größere Aussagekraft; z.B. gewinnt man hier bei Betrachtung der Integralgleichung (4.1) lediglich die Konvergenz der iterativen Funktionenfolgen im Mittel, bei Betrachtung des RWP (1.1) - (1.2) dagegen deren gleichmäßige Konvergenz samt ihren ersten Ableitungen (folgt nach Einbettung (i), S. 55, aus der Konvergenz im Mittel für die zweiten Ableitungen).

## K A P I T E L   V

### Anwendungsbeispiele aus der Strömungsmechanik

Dieses Kapitel befaßt sich mit der Anwendung der Ergebnisse aus Kapitel I - III auf die Navier-Stokes-Gleichungen (NSG), den Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik. Wir beschränken uns im wesentlichen auf den Fall inkompressibler, stationärer, ebener Strömungen. Hierfür läßt sich das System der NSG auf ein Randwertproblem (RWP) der in Kapitel II betrachteten Art mit  $m := n := 2$  zurückführen. Die Lösung des RWP ist die "Stromfunktion" (übliches Symbol:  $\psi$ ), deren Höhenlinienbild die zugehörige Strömung unmittelbar wiedergibt. Der Parameter vor dem Bilinearteil ist als sogenannte "Reynoldszahl" (Re) in natürlicher Weise vorgegeben. Aufgrund der Bedeutung des Parameters bei unseren Betrachtungen wird kurz auf den physikalischen Hintergrund der Reynoldszahl eingegangen. Ferner werden die mit der Lösung der NSG verbundenen Schwierigkeiten diskutiert, wobei die für den Mathematiker interessanten Gesichtspunkte herausgestellt werden - insbesondere im Hinblick der hier entwickelten Methoden. Im übrigen ist Abschnitt 1 als Einführung für den Leser gedacht, der mit der Problematik der NSG weniger vertraut ist.

Abschnitt 2 befaßt sich mit der Realisierung der Voraussetzungen für die Lösungsverfahren aus Kapitel I. Hierzu werden die Ergebnisse aus Kapitel II und III herangezogen. Bezüglich der Lösung des zugehörigen linearen Problems für  $Re = 0$ , die unter dem Begriff "Stokes'sche Näherung" ( $\psi_{St}$ ) allgemein bekannt ist, kann zusätzlich auf spezielle Ergebnisse der Literatur zurückgegriffen werden. Es wird vorausgesetzt, daß das betrachtete zweidimensionale Gebiet beschränkt und einfach zusammenhängend ist und ferner sein Rand zumindest stückweise genügend glatt ist. Zur Normabschätzung von Bilinearteil durch Linearteil wird aufgrund der speziellen Struktur der NSG zunächst nur die Konstante  $C_3(2, \Omega)$  benötigt. Bei Kenntnis von  $\psi_{St}$  und  $C_3(2, \Omega)$  können wir beispielsweise unmittelbar einen ersten Parameterbereich  $[0, Re^+]$  angeben, wo in gewisser Umgebung von  $\psi_{St}$  genau eine Lösung des Problems zu  $Re \in [0, Re^+]$  existiert und die in Kapitel I betrachteten Iterationsverfahren ausgehend von  $\psi_{St}$  als Anfangsnäherung konvergieren.

Die folgenden drei Abschnitte haben jeweils ein Beispiel zum Inhalt. Beispiel 1 behandelt die Strömung in einem kreisförmigen Gebiet bei Vorgabe einer periodischen Geschwindigkeitsverteilung auf dem Rand. Beispiel 2 betrifft die Strömung in einem quadratischen Querschnitt, wo an einer Seite eine gewisse Geschwindigkeitsverteilung vorgegeben ist und die übrigen Seiten feste Begrenzungsflächen darstellen. In Beispiel 3 steht das quadratische Grundgebiet für eine durchflossene Kammer. Die beiden ersten Beispiele sind in der Literatur bereits mehrfach behandelt worden. Dort sind jedoch für die jeweils berechneten Näherungen bezüglich Gültigkeitsbereich und Fehlerabschätzung keine zahlenmäßigen Angaben gemacht, während die von uns angewandten Verfahren (SA, NV und TV) funktionalanalytisch abgesichert werden. Allerdings wird z.B. auch das bei jedem NV-Schritt auftretende RWP wegen seiner Kompliziertheit bei geeigneter Diskretisierung durch numerische Differentiation gelöst. Da es sich jeweils um ein lineares Problem handelt, wird davon ausgegangen, daß die hierdurch in Kauf genommenen Ungenauigkeiten in unserem Rahmen vertretbar sind. Unser Interesse gilt vielmehr dem Linearisierungsprozeß als solchem. Hierbei wird für Beispiel 1 ein Anwendungsbereich für Reynoldszahlen bis über 1 hinaus erzielt; für Beispiel 2 und 3 muß dem ungünstigeren Wert für  $C_3(2,\Omega)$  Rechnung getragen werden. Was man diesbezüglich erreicht, hängt natürlich nicht nur vom Gebiet, sondern wesentlich auch von den auferlegten Randbedingungen ab.

## 1. Einführung in die Problematik der Navier-Stokes-Gleichungen

Die Bewegung einer Flüssigkeit (bzw. eines Gases) wird beschrieben durch die Navier-Stokes-Gleichungen (NSG). Es seien  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  das Geschwindigkeitsfeld,  $p$  der Druck,  $\rho$  die Dichte,  $\nu$  die Zähigkeit der Flüssigkeit und  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  das äußere Kraftfeld. Alle Größen hängen im allgemeinen vom Ortsvektor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , der Zeit  $t$  und der Temperatur  $T$  ab, wobei dann z.B.  $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t, T)$  die Geschwindigkeit des infinitesimalen Flüssigkeitsteilchen an der Stelle  $(x_1, x_2, x_3, t, T)$  angibt.

Hinsichtlich einer ausführlichen Herleitung der (vollständigen) NSG sei z.B. auf die grundlegenden Werke von LAMB [32], BATCHELOR [9],

SCHLICHTING [44] und FRANK-MISES [24] verwiesen; für einen kurzen Überblick sei das Taschenbuch von WIEGHARDT [60] empfohlen.

Wir wollen hier folgende Bedingungen zugrunde legen:

- Die Temperaturabhängigkeit kann vernachlässigt bleiben.
- Die Zähigkeit der Flüssigkeit ist konstant.
- Die Flüssigkeit ist inkompressibel, d.h. die Dichte ist konstant.
- Die Bewegung ist stationär, d.h. die Größen  $v$ ,  $p$  und  $\tau$  hängen nicht explizit von der Zeit ab.

Unter diesen Annahmen genügen die oben genannten Größen dem Differentialgleichungssystem:

$$(1.1) \quad -\mu \Delta v_i + \rho \left( v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \right) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \text{ auf } \Omega, \quad i = 1(1)3$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad \text{auf } \Omega$$

$$(1.3a) \quad v = a \quad \text{auf } \Gamma$$

bzw. bei unbeschränktem Gebiet  $\Omega$  (evtl. zusätzlich)

$$(1.3b) \quad v = b \quad \text{für } |x| = \infty.$$

Hierbei sind  $a$  ein auf  $\Gamma$  vorgegebenes Vektorfeld und  $b$  ein konstanter Vektor;  $f_i$ ,  $\mu$  und  $\rho$  werden als bekannt vorausgesetzt; gesucht sind die Geschwindigkeitskomponenten und der Druck. Wenn  $v_i \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $i = 1(1)3$  und  $p \in C^1(\Omega)$ , so sprechen wir von einer klassischen Lösung. Die Formulierung der NSG als Variationsproblem (siehe LADYSHENSKAJA [30], V. § 1 und TEMAM [54], § 2.1) führt ähnlich wie beim Dirichletproblem in Kapitel II zum verallgemeinerten Lösungsbegriff, wobei wir von einer starken Lösung sprechen, wenn  $v \in H^2(\Omega)$  und  $p \in H^1(\Omega)$ .

Die drei Gleichungen (1.1) bedeuten das Gleichgewicht zwischen den inneren und den äußeren Kräften. Hierbei sind  $-\mu \Delta v$  die Zähigkeits- und  $\rho \dot{v} = \rho \left( v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$  die Beschleunigungsskräfte (über den Doppelindex ist zu summieren;  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ , da stationäre Strömung vorausgesetzt wird). Die Gleichung (1.2) ergibt sich mit der Konstanz der Dichte aus der Kontinuitätsgleichung

$$(1.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Mit (1.3) ist angenommen, daß die Randbedingungen an  $\partial$  gestellt sind (es sind auch teilweise Randbedingungen für  $p$  denkbar). Bei (1.3a) muß  $\alpha$  wegen (1.2) gemäß dem Gaußschen Satz der Verträglichkeitsbedingung

$$(1.5) \quad \int_{\Gamma} \alpha \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$$

genügen. Physikalisch bedeutet (1.3a), daß die Flüssigkeitsteilchen auf dem Rand die Geschwindigkeit der umgebenden Begrenzung annehmen, d.h. z.B.: An einem in der Flüssigkeit ruhendem Körper verschwinden nicht nur die senkrechten, sondern auch die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten ("Haftbedingung"). (1.3b) besagt, daß im Unendlichen, d.h. in der Praxis, weit entfernt von den betrachteten Störungen, die Geschwindigkeit endlich ist. Probleme mit sogenannten "freien Rändern" werden hier nicht betrachtet. Bei den meisten Problemen ergibt sich eine charakteristische, konstante Geschwindigkeit  $V > 0$  und eine charakteristische Länge  $L > 0$ . Mit Hilfe von  $V$  und  $L$  läßt sich das System der NSG auf dimensionslose Größen transformieren vermöge:

$$(1.6) \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{v}'(\mathbf{x}') := \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{V}, \quad p'(\mathbf{x}') := \frac{p(\mathbf{x})}{\rho V^2}, \quad \eta'(\mathbf{x}') := \frac{L \eta(\mathbf{x})}{\rho V^2}$$

Entsprechend transformieren sich  $\Omega$  und  $\alpha$  bzw.  $\beta$  auf  $\Omega'$ ,  $\alpha'$  bzw.  $\beta'$ . Aus (1.1) erhalten wir dann für die gestrichenen Größen

$$(1.1)' \quad -\Delta v'_i + \operatorname{Re}(v'_1 \frac{\partial v'_i}{\partial x'_1} + v'_2 \frac{\partial v'_i}{\partial x'_2} + v'_3 \frac{\partial v'_i}{\partial x'_3}) - \operatorname{Re}(f'_i - \frac{\partial p'}{\partial x'_i}) \text{ auf } \Omega', \quad i = 1(1)3$$

wobei die sogenannte "Reynoldszahl"  $\operatorname{Re}$  definiert ist durch

$$(1.7) \quad \operatorname{Re} := \frac{\rho L V}{\mu}$$

Die Kontinuitätsgleichung (1.2) und die Randbedingungen (1.3) transformieren sich entsprechend. Dem nach Definition dimensionslosen Parameter  $\operatorname{Re}$  kommt besondere Bedeutung zu. Aus der Transformation wird deutlich, daß alle Strömungen, die zu gewissen Werten  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $L$  und  $V$  gehören, durch ein und dieselbe dimensionslose Lösung des gestrichenen Systems beschrieben werden, wenn nur der Ausdruck  $\frac{\rho L V}{\mu}$  denselben Wert behält und die Geometrie der Randbedingungen dieselben sind. Andererseits ist zu vermuten, daß die Größe von  $\operatorname{Re}$  als Faktor vor dem nichtlinearen Term in (1.1)' wesentlichen Einfluß auf die Lösung des Problems hat - einschließlich Existenz-, Eindeutigkeits- und Konstruktionsfragen. Im

folgenden lassen wir die Strichkennzeichnung wieder fallen. Ob es sich um die ursprünglichen, oder um die dimensionslosen Größen handelt, ersehen wir daran, ob in (1.1)  $\rho$  und  $\mu$  oder aber  $Re$  auftreten. In Verbindung mit  $\rho$  und  $\mu$  wird auch oft die "kinematische Zähigkeit"  $\nu := \frac{\mu}{\rho}$  benutzt, die aber von der dimensionslosen Größe  $\frac{1}{Re}$  wohl unterschieden werden muß.

Die Lösung der NSG stellt selbst unter den eingangs getroffenen Annahmen in der Regel ein schwieriges Problem dar. Hinzukommt, daß eine berechnete Lösung nicht immer die Strömung wiedergibt, die in Realität auftritt. Das liegt zum einen an den idealisierten Bedingungen, die im physikalischen Versuch nicht exakt zu verwirklichen bzw. stabil zu halten sind; zum anderen aber stellt sich die Frage, ob etwa bei der Konstruktion einer Lösung andere Lösungen "verpaßt" wurden. Hinsichtlich dieser Problematik sei verwiesen auf die "Couette-Strömung" (stationäre Strömung zwischen zwei koaxialen, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Kreiszylindern - siehe z.B. WIEGHARDT [60], Seite 187) und die "Poiseuille-Strömung" (stationäre Strömung in einem langen Rohr - siehe z.B. WIEGHARDT [60], Seite 148). Beide Strömungsformen ergeben zwar exakte Lösungen der NSG, in der Praxis treten sie jedoch nur bis zu einer kritischen Reynoldszahl  $Re_K$  auf, ohne daß sich  $Re_K$  im voraus fixieren ließe. Für  $Re > Re_K$  entsteht im ersten Fall eine unsymmetrische Strömung, während im zweiten Fall Turbulenzen auftreten. Theoretische Untersuchungen zeigen, daß die NSG (gemeint sind hiermit die stationären Gleichungen) unter recht allgemeinen Voraussetzungen an  $\Omega$ ,  $a$  bzw.  $t$  und  $f$  zumindest eine verallgemeinerte Lösung besitzen; diese ist um so glatter, je glatter der Rand, die dort auferlegten Bedingungen und das äußere Kraftfeld ist. Diesbezüglich verweisen wir speziell auf die Ergebnisse von LADYSHENSKAJA (vergl. die Sätze aus [30], Kapitel V) und TEMAM (vergl. die Sätze aus [54], Chapter II, § 1). Eindeutigkeit kann jedoch allgemein nur für genügend kleine Reynoldszahlen gezeigt werden (vergl. [30], Satz 2, S. 85 und [54], Theorem 1.3, S. 167 und Theorem 1.6, S. 179). Bei homogenen Randbedingungen hat man beispielsweise für die Eindeutigkeit einer verallgemeinerten Lösung die hinreichende Bedingung

$$(1.8) \quad 2\sqrt{n} [\lambda_1(1, \Omega)]^{-\frac{1}{4}} Re^2 \left( \sum_{i,k=1}^n \|g_{ik}\|_{0,2}^2 \right)^{1/2} < 1,$$

wenn  $g_{ik} \in L^2(\Gamma)$ ,  $i, k = 1(1)n$  so gewählt werden können, daß

$$f_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_k}, \quad i = 1(1)n; \quad n \text{ ist die Dimension des Raumes, also i.a.}$$

$n = 3$  - für ES (s.u.) ist  $n = 2$  einzusetzen. (1.8) erhält man aus LADYSHENSKAJA [30], Bedingung (14) auf S. 85, wenn man bezüglich der Norm des durch  $\mathfrak{f}$  definierten Funktional nach [30], Bedingung 3, S. 31 verfährt und die SU anwendet; bezüglich ES beachte man die Bemerkung in [30], S. 86 unten.

In der Tat sind Beispiele bekannt, wo für hinreichend große Reynolds-zahlen das Problem mehrdeutig lösbar wird (vergl. TEMAM [54], Chapter II, § 4).

Bis auf das Problem der Mehrdeutigkeit können wir zwar aufgrund der oben genannten theoretischen Ergebnisse die Existenzfrage weitgehend als gelöst ansehen; nach wie vor bereitet jedoch die praktische, d.h. konstruktive Lösung der NSG große Schwierigkeiten. Die Problematik der NSG liegt hauptsächlich in folgenden Eigenarten begründet:

1. Umfang und Kopplung der Gleichungen als System
2. Nichtlinearität der Gleichungen
3. Abhängigkeit von der Gebietsform und den Randbedingungen

Hinsichtlich Punkt 1 erhält man eine wesentliche Vereinfachung, wenn von der physikalischen Problemstellung her, d.h. angesichts der äußeren Kräfte und Randbedingungen, von der Strömung apriori gewisse Symmetrien zu erwarten sind. Man unterscheidet hauptsächlich zwei Fälle: Im ersten Fall ist die Strömung auf allen in einer gewissen Richtung parallelen Ebenen gleich; im anderen Fall existiert eine Gerade (Symmetrieachse), so daß die Strömung auf allen Ebenen gleich ist, welche die Gerade als gemeinsame Schnittlinie besitzen.

Im ersten Fall spricht man von ebener Strömung (ES) und im zweiten Fall von achsialsymmetrischer Strömung (AS). Die oben genannte Couette-Strömung ist ein Beispiel für ES, die Poiseuille-Strömung in einem gleichförmigen Rohr ein solches für AS. Bei ES läßt sich das Koordinatensystem so einrichten, daß die Bewegung in  $z$ -Richtung  $((x, y, z)$  für  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $(f_x, f_y, f_z)$  für  $(f_1, f_2, f_3)$  etc.) gleich ist und wir uns auf die Betrachtung der  $(x, y)$ -Ebene beschränken können. Bei AS legen wir die  $z$ -Achse auf die Symmetrieachse und führen in der  $(x, y)$ -Ebene in

üblicher Weise Polarkoordinaten  $(\rho, \theta)$  ein. Die Bedingung für AS besagt dann gerade, daß die Strömung vom Winkel  $\theta$  unabhängig ist; wir können uns damit lediglich auf die Koordinaten  $(\rho, \zeta)$  mit  $\rho := \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\zeta := z$  beschränken. Mit  $\Omega$  bezeichnen wir nun die entsprechende Projektion des ursprünglichen Gebietes. Wir wollen voraussetzen, daß  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist (andernfalls vergl. TEMAM [54], S. 37-38). Wegen (1.2) existiert dann eine von  $(x, y)$  bzw.  $(\rho, \zeta)$  abhängige "Stromfunktion"  $\psi$  mit

$$(1.9) \quad \dot{x} = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \dot{y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{auf } \Omega \quad \text{für ES bzw.}$$

$$(1.10) \quad \dot{\zeta} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \quad \dot{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \quad \text{auf } \Omega \quad \text{für AS,}$$

wobei  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\zeta}$  und  $\dot{\rho}$  die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten darstellen. Der Name "Stromfunktion" rührt daher, daß wegen (1.9) bzw. (1.10) die Linien  $\psi = \text{const.}$  mit den "Stromlinien" zusammenfallen, die (im stationären Fall) gerade die Bahnkurven der Flüssigkeitsteilchen wiedergeben. Die Höhenlinien von  $\psi$  vermitteln also unmittelbar ein Strömungsbild (siehe Abschnitt 3-5). Da  $\psi$  das Integral über die Geschwindigkeit ist, ist dabei die Differenz zweier Höhenlinienwerte ein Maß für den Fluß zwischen diesen beiden Stromlinien (vergl. FRANK-MISES [24], Bd. II, S. 374 und 399 sowie BATCHELOR [9], S. 75-79). Durch Anwendung der Rotation geht (1.1) über in eine Gleichung für  $\psi$  der Form

$$(1.11) \quad L\psi + \text{Re}B(\psi, \psi) = r \quad \text{auf } \Omega,$$

wobei für ES:

$$(1.12) \quad L := \Delta^2$$

$$(1.13) \quad B(\psi, \varphi) := \frac{1}{2} [B^*(\psi, \Delta\varphi) + B^*(\varphi, \Delta\psi)] \quad \text{mit}$$

$$B^*(u, v) := \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$(1.14) \quad r := \text{Re} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{y}{\rho} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{x}{\rho} \right)$$

und für AS:

$$(1.15) \quad L := \mathcal{A}^2 \quad \text{mit} \quad \mathcal{A} := \frac{\partial}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$$

$$(1.16) \quad B(\psi, \varphi) := \frac{1}{2} [B^*(\psi, \nabla \varphi) + B^*(\varphi, \nabla \psi)] \quad \text{mit}$$

$$B^*(u, v) := \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho} v \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \zeta}$$

$$(1.17) \quad r := \operatorname{Re} \left( \frac{\partial f_{\rho}}{\partial \zeta} - \frac{\partial f_{\zeta}}{\partial \rho} \right)$$

Die rechte Seite  $r$  verschwindet, wenn die äußere Kraft ein Potentialfeld ist; man beachte, daß im anderen Fall die rechte Seite von  $\operatorname{Re}$  abhängt. Die Randbedingungen (1.3) für das Geschwindigkeitsfeld legen über (1.9) bzw. (1.10) den Gradienten von  $\psi$  auf dem Rand fest. Hieraus erhalten wir für  $\psi$  die Dirichletschen Randbedingungen

$$(1.18) \quad \psi = g_0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = g_1 \quad \text{auf } \Gamma,$$

wobei sich die auf dem Rand definierten Funktionen  $g_0$  und  $g_1$  aus (1.3) und (1.9) bzw. (1.10) bestimmen (siehe Abschnitt 2, Satz 1, S. 134). Die Verträglichkeitsbedingung (1.5) ist im Fall  $g_0 \in C^1(\Gamma)$  erfüllt.

Nach Konstruktion liegt  $g_0$  nur bis auf eine Konstante eindeutig fest. Die Wahl der Konstanten ist für die Lösung des Problems bedeutungslos, da in (1.11) lediglich die Ableitungen von  $\psi$  eingehen.

Damit ist das System (1.1) bis (1.3) auf eine Differentialgleichung vierter Ordnung mit Dirichletschen Randbedingungen zurückgeführt und gesucht ist lediglich noch eine Funktion in zwei Veränderlichen. Der Übergang vom physikalischen Modell zur mathematischen Formulierung als ES- oder AS-Problem ist natürlich von einer entsprechenden Idealisierung begleitet. Mathematisch nachteilig ist die höhere Ordnung in (1.11), die durch Anwendung der Rotation künstlich erzeugt wird und deshalb zusätzliche Glattheitseigenschaften fordert.

Es sei bemerkt, daß  $\omega := -\Delta \psi$  bzw.  $\omega := -\nabla^2 \psi$  gerade die von der Symmetrie her nicht verschwindende Komponente von  $\operatorname{rot} b$  darstellt. Mit Hilfe von  $\omega$  kann (1.11) in das folgende System zweiter Ordnung umgeschrieben werden:

$$(1.19) \quad -\Delta \psi = \omega \quad \text{bzw.} \quad -\nabla^2 \psi = \omega, \quad -\Delta \omega + \operatorname{Re} B^*(\omega, \psi) = r \quad \text{auf } \Omega$$

Diese Aufspaltung ist allerdings problematisch, da mit (1.3) keine Randbedingungen für  $\omega$  vorliegen, d.h. wir können die Randbedingungen (1.18) für  $\psi$  und  $\frac{\partial \psi}{\partial \nu}$  nicht durch solche für  $\psi$  und  $\Delta \psi$  in natürlicher Weise ersetzen. Dies ersieht man z.B. daran, daß homogene Randbedingungen für  $\psi$  und  $\Delta \psi$  nicht notwendig homogene Dirichletsche Randbedingungen

implizieren (für  $\psi(x,y) := 1 - e^{1-(x^2+y^2)}$  sind z.B. auf dem Rand des Einheitskreises  $\psi = \Delta\psi = 0$ , aber  $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 2$ ). Dennoch bleibt die Aufspaltung (1.19) für die Praxis von Interesse (vergl. Anhang II.B).

Die Nichtlinearität der NSG ist der Hauptgrund dafür, daß nur in wenigen Ausnahmefällen die exakte Lösung analytisch vorliegt. Es sind dies hauptsächlich "triviale" Lösungen, d.h. solche, wo der nichtlineare Teil identisch verschwindet. Hierzu gehören die oben angeführten Beispiele der Couette- und der Poiseuille-Strömung. In diesem Sinne "nicht-triviale" Lösungen liefern die Beispiele der "Staupunktströmung" für ES und AS (vergl. WIEGHARDT [60], S. 154-156). Eine gute Näherung bei kleinen Reynoldszahlen ( $Re \ll 1$ ) ist die sogenannte "Stokes'sche Näherung", die Lösung für  $Re = 0$ . Dagegen hat sich gezeigt, daß auch für  $Re \gg 1$  die durch den Linearteil gegebenen Zähigkeitskräfte gegenüber den Beschleunigungskräften nicht vernachlässigt werden können. Der Grund hierfür ist darin zu sehen, daß bei Weglassen des Linearteils die Differentialgleichungen in der Ordnung erniedrigt werden und dadurch Freiheitsgrade zur vollständigen Erfüllung der Randbedingungen fehlen. Aus demselben Grund sind die rotationsfreien Strömungen, die für ES und AS wegen  $\Delta\psi = 0$  bzw.  $\Delta\psi = 0$  die Differentialgleichung (1.11) für den Regelfall  $r = 0$  identisch erfüllen, nicht als vollwertige Lösungen der NSG anzusehen. Indem man nur  $\psi$  selbst auf dem Rand vorschreibt, verzichtet man auf die Haftbedingung und interpretiert die zugehörige Lösung als Strömung einer "idealen Flüssigkeit" oder als Strömung an glatten Wänden. Eine Konsequenz der fehlenden Haftbedingung ist allerdings die, daß ein von einer idealen Flüssigkeit umströmter Körper keine Kraft erfährt. Für ES besitzt das zugehörige Geschwindigkeitsfeld wegen (1.9) ein Potential. Man spricht deshalb hier auch von "Potentialströmungen". Diese sind oft relativ einfach zu bestimmen, indem das Potential den Realteil und die Stromfunktion den Imaginärteil einer auf  $\Omega$  holomorphen Funktion darstellen. Die Bedeutung der Potentialströmung liegt darin, daß sie in gewisser Entfernung vom Rand in vielen Fällen das wahre Strömungsbild recht präzise wiedergibt. Speziell das oben erwähnte Beispiel der Staupunktströmung zeigt, daß die Strömung nur in einer dünnen Schicht am Rand von der zugehörigen Potentialströmung wesentlich verschieden ist, wobei die Breite der Schicht bei wachsendem  $Re$  wie  $\frac{1}{Re}$  abnimmt. Dieser Umstand wird in der "Grenzschichttheorie" ausgenutzt, wo man die NSG nur innerhalb einer dünnen Randschicht vollständig löst und im übrigen an die zugehörige rotationsfreie

Strömung anknüpft.

Zur Lösung der NSG ist man in der Regel auf numerische Näherungsverfahren angewiesen. Hierbei werden hauptsächlich Projektionsmethoden (Diskretisierung) und in letzter Zeit die Methode der finiten Elemente herangezogen (vergl. z.B. TEMAM [54]). Natürlich birgt dabei der nicht-lineare Charakter der Gleichungen einige Probleme. Deshalb sind geeignete Linearisierungen der NSG von besonderem Interesse. Eine solche läßt sich z.B. mit der charakteristischen Geschwindigkeit erreichen, indem man in die eine Komponente des Bilinearteils einen den äußeren Gegebenheiten angepaßten, konstanten Geschwindigkeitsvektor  $v_0$  einsetzt. Der Prozeß entspricht gerade der formalen Anwendung des NV auf das System (1.1) mit  $v_0$  als Ausgangsnäherung. Die Lösung des so linearisierten Systems unter den vorgeschriebenen Randbedingungen ist als "Oseensche Näherung" bekannt. In diesem Zusammenhang läßt sich die "Stokes'sche Näherung" formal als 1. NV-Näherung für  $v_0 := 0$  als Ausgangsnäherung interpretieren (vergl. auch PARMET-SAIBEL [41]). Im Gegensatz zur Stokes'schen Näherung stellt die Oseensche oft auch für hohe Reynoldszahlen eine gute Näherung dar, da hierfür die Linearisierung ein Korrekturglied mit  $Re$  als Faktor enthält. Voraussetzung ist, daß bereits die charakteristische Geschwindigkeit in gewissem Rahmen als Näherung angesehen werden kann; dies ist der Fall, wenn äußeres Kraftfeld und Randbedingungen nur schwach veränderlich sind. Andererseits ist aus dem analytischen Zusammenhang klar, daß unter genügenden Regularitätsvoraussetzungen die Oseensche Näherung für  $Re \rightarrow 0$  in die Stokessche übergeht. Allerdings ist die Oseensche Näherung nicht als 1. NV-Näherung im echten Sinne anzusehen, da  $v_0$  die Randbedingungen nicht erfüllt. Eine Berücksichtigung der Randbedingungen von Anfang an würde gerade der in Kapitel I beschriebenen Methode entsprechen. In der Regel wird man hierbei dann von der Stokesschen Näherung ausgehen, welche die geforderten Randbedingungen ja bereits erfüllt (Existenz siehe Abschnitt 2). Beim Verfahren der sukzessiven Approximation (SA) ist dabei in nicht zu komplizierten Beispielen zumindest die erste Näherung noch analytisch zu bestimmen und liefert oft einen einfacheren Ausdruck als die Oseensche Näherung (vergl. Abschnitt 3). Aus diesem Grunde wird SA bereits seit langem zur näherungsweise Lösung der NSG eingesetzt (siehe z.B. DEAN [18], PALTSEV [40], SNEDDON [48], SCHOENHALS [46], STYCZEK [52]), auch wenn es hierbei in der Regel an konkreten Fehlerabschätzungen mangelt. Die resultierenden Gleichungen beim NV

sind in den meisten Fällen analytisch nicht zu lösen und es müssen wieder die oben erwähnten numerischen Lösungsmethoden angewandt werden - diesmal allerdings nur auf lineare Gleichungen. Im Vergleich zu SA kommt daher das NV erst mit den wachsenden Möglichkeiten moderner Rechenanlagen zum Einsatz (vergl. WESSELING [59]). Hierbei konkurriert es mit den "direkten Diskretisierungsverfahren". Für diese wird erfahrungsgemäß der Fehler wesentlich höher zu veranschlagen sein als der Diskretisierungsfehler beim Auflösen der linearen Gleichungen des NV. Deshalb ist das NV in dem Moment interessant, wo der durch die NV-Linearisierung bedingte Fehler abgeschätzt werden kann. Dies gilt in gleicher Weise für TV.

Hinsichtlich der dritten der auf Seite 128 genannten Schwierigkeiten ist zunächst klar, daß die Lösungskonstruktion für jede einzelne Gebietsform ein eigenes Problem darstellt. Darüber hinaus birgt oft die Zuschneidung des physikalischen Vorgangs auf ein entsprechendes mathematisches Modell gewisse Unzulänglichkeiten, die ihren Ursprung in andererseits wünschenswerten Vereinfachungen besitzen. Die Beschränkung auf ES oder AS rechnet hierzu; ferner haben oft die in der mathematischen Betrachtungsweise zugrundegelegten Gebiete Ecken oder sind nicht beschränkt. Die Folge ist das Auftreten von Singularitäten. Hinsichtlich der Theorie hilft hier teilweise die oben genannte Abschwächung des Lösungsbegriffs, wobei man in Kauf nimmt, daß die höheren Ableitungen nicht mehr meßbar sind. Für die Praxis ist es dann günstiger, diese Beispiele geeignet zu entschärfen - etwa indem man Ecken abrundet und unbeschränkte Strömungen nur lokal betrachtet.

## 2. Die Voraussetzungen und Abschätzungen für den ebenen Fall

Der in Abschnitt 1 geschilderte Fall ES ist gerade ein Problem der in den Kapiteln I - III behandelten Art mit  $n := m := 2$  und  $\lambda := \operatorname{Re} > 0$ . Zur Definition des Linearteils L und der Bilinearform B sei auf (1.11) - (1.13) verwiesen.

Die Voraussetzungen (V3) und (V4) an L bzw. B aus Satz 3, Kapitel II, S. 67, sind erfüllt. Bezüglich (V3) sei auf das Beispiel in Kapitel II, S. 63, hingewiesen; bezüglich (V4) vermerken wir, daß  $B(v, w)$  für

$v, w \in H^4(\Omega)$  lediglich Produkte von ersten mit dritten Ableitungen enthält und somit die Bedingung (3.5) - (3.7), S. 67, eingehalten werden.

Die Voraussetzung (V1) (Satz 3, S. 67) sei im Rahmen von Bemerkung 2, Kapitel II, S. 66, auf stückweise Glattheit abgeschwächt, womit von  $\Omega$  insgesamt folgende Eigenschaften verlangt werden:

1.  $\Omega$  ist beschränkt
2.  $\Omega$  ist einfach zusammenhängend
3.  $\Omega$  erfüllt die Kegelbedingung
4. Der Rand von  $\Omega$  besteht aus endlich vielen  $C^4$ -Kurven.

Die Voraussetzung (V2) (Satz 3, S. 67) wird mit der Existenz der Stokes'schen Näherung erfüllt. Hierzu gilt:

#### Satz 1

Bezugnehmend auf (1.14) und (1.18) seien  $r \in L^2(\Omega)$ ,  $g_0 \in H^2(\Gamma)$  und  $g_1 \in H^1(\Gamma)$ .

Dann existiert genau eine Lösung  $u \in H^4(\Omega)$  von

$$(2.1) \quad \Delta^2 u = r \quad \text{auf } \Omega$$

$$(2.2) \quad u|_{\Gamma} = g_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} = g_1$$

Darüber hinaus gelten:

- a) Im Fall  $r = 0$  und  $g_0, g_1 \in C^2(\Gamma)$  ist  $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$
- b) Ist für ein  $j \in \mathbb{N}_0$ ,  $\Omega$  vom  $C^{4+j}$ -Typ,  $r \in C^j(\Omega)$  und die Randbedingung (1.18) von einer Funktion  $w \in C^{4+j}(\Omega)$  erfüllt, so ist  $u \in C^{2+j}(\Omega)$ .

#### Beweis

Es sei zunächst vorausgesetzt, daß  $\Omega$  vom  $C^4$ -Typ ist. Nach Kapitel II, (2.13) und Satz 1.a sowie Satz 2.b genügt es zu zeigen, daß die Randbedingungen (2.2) von einer Funktion  $w \in H^4(\Omega)$  erfüllbar sind.

Hierzu sei  $h$  Lösung des "Neumann'schen Problems"

$$(2.3) \quad \Delta h = 0 \quad \text{auf } \Omega; \quad \frac{\partial h}{\partial \nu}|_{\Gamma} = g'_0$$

$g'_0$  bezeichnet hierbei die Ableitung von  $g_0 \in H^2(\Gamma)$  nach dem Randparameter. Eine Lösung von (2.3) existiert in  $H^4(\Omega)$  (wegen  $g'_0 \in H^1(\Gamma)$ )

und ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt (vergl. LIONS-MAGENES [33] § 8-9). Ferner läßt sich eine Funktion  $k \in H^4(\Omega)$  konstruieren mit

$$(2.4) \quad \frac{\partial k}{\partial \tau}|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial \nu}|_{\Gamma} = g_1 - \frac{\partial h}{\partial \tau}|_{\Gamma},$$

wobei  $\frac{\partial}{\partial \tau}$  die tangentielle Ableitung bedeute (in bezug auf den Normalenvektor  $n = (v_1, v_2)$  ist hier  $t = (\tau_1, \tau_2) = (-v_2, v_1)$  zu setzen). Für (2.4) wird benutzt, daß sich eine Funktion aus  $H^1(\Gamma)$  zu einer auf  $\bar{\Omega}$  erklärten Funktion aus  $H^3(\Omega)$  fortsetzen läßt (vergl. ADAMS [3] 7.56, S. 217). Durch

$$(2.5) \quad v := \nabla h + \left( \frac{\partial k}{\partial y}, -\frac{\partial k}{\partial x} \right) \quad (\text{auf } \Omega)$$

wird ein Vektorfeld aus  $H^3(\Omega)$  erklärt. Wegen  $\Delta h = 0$  ist  $v$  divergenzfrei und da  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist, existiert  $w \in H^4(\Omega)$  mit

$$(2.6) \quad v = \left( \frac{\partial w}{\partial y}, -\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (\text{auf } \Omega)$$

Bei entsprechender Wahl der Integrationskonstanten erfüllt  $w$  die Randbedingung (2.2), indem aufgrund obiger Beziehungen

$$(2.7) \quad \frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\Gamma} = g_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial \tau}|_{\Gamma} = g'_0.$$

Es leuchtet ein, daß diese Konstruktion auch noch für den Fall durchzuführen ist, wo  $\Gamma$  lediglich stückweise glatt ist und der Normalenvektor bis auf endlich viele Eckpunkte überall wohldefiniert bleibt (man beachte, daß aufgrund obiger Bedingungen 1-4  $\Omega$  vom Lipschitz-Typ ist; in diesem Zusammenhang sei auch verwiesen auf LADYSHENSKAJA [30], Kapitel I, § 2). ▲

### Bemerkungen

1. Satz 1 entspricht gerade der Proposition 2.3 von TEMAM [54], S. 35, für  $m := 1$ ,  $\alpha := 2$  und  $g := 0$  (dortige Bezeichnungen). Auch der obige Beweis stammt im wesentlichen aus dieser Quelle, wobei die obige Konstruktion von  $h$  und  $k$  bereits bei LADYSHENSKAJA [30], S. 21-22, aufgezeigt wird. In [30] und [54] wird allerdings von dem auf dem Rand vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld  $a$  aus (1.3a) ausgegangen. Die obige Konstruktion wurde hier nachvollzogen, um den in Abschnitt 1 bereits geschilderten Zusammenhang zwischen Stromfunktion

und Geschwindigkeitsfeld genauer darzulegen. Die Verbindung zwischen  $a$  und den obigen Funktionen  $g_0$  und  $g_1$  besteht in der Beziehung

$$(2.8) \quad g'_0 = a \cdot n, \quad g_1 = a \cdot t$$

Da  $g_0$  stetig ist, verschwindet das geschlossene Randintegral über  $g'_0$ ; dies bedeutet aber gerade, daß  $a$  die Verträglichkeitsbedingung (1.5) erfüllt. Ferner ist gemäß den Glattheitseigenschaften von  $g_0$  und  $g_1$  vorauszusetzen, daß  $a \in H^1(\Gamma)$  ist. Das Vektorfeld  $b$  aus (2.5) ist dann die Fortsetzung von  $a$  auf  $\Omega$  und  $w$  aus (2.6) ist sozusagen die Stromfunktion zu  $b$ .

2. Besitzt das Kraftfeld kein Potential, so ist  $r \neq 0$  und die Lösung von (2.1)-(2.2) wegen (1.14) von der Reynoldszahl abhängig, wenn man die Stokes'sche Näherung nicht auf ein mit  $Re$  veränderliches Kraftfeld beziehen will. Diesem Umstand kann bei unseren Betrachtungen Rechnung getragen werden (vergl. die Abschätzungen (2.14) und (2.15) sowie das Beispiel am Ende dieses Abschnitts). Bei den Beispielen in Abschnitt 3-5 ist stets  $r = 0$ .

Gemäß Abschnitt 1 bezeichnen wir die Lösung von (2.1)-(2.2) durch  $\psi_{St}$ . In bezug auf die Voraussetzungen aus Kapitel I (siehe S. 6-7) setzen wir gemäß Satz 3 (S. 67-68)

$$(2.9) \quad w_M := \psi_{St}, \quad Y := L^2(\Omega), \quad U := H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$$

mit der üblichen  $L^2$ -Norm in  $Y$  und der durch  $L$  induzierten Norm  $\|\cdot\|_L := \|\Delta^2 \cdot\|_{0,2}$  auf  $U$ ;  $L$  und  $B$  wie in (1.11) - (1.13).

Nach den Voraussetzungen über  $\Omega$  existieren die Konstanten  $C_k$  und  $D_j$  zu  $n = m = 2$  für  $k = O(1)4$  und  $j = O(1)2$ . Mit diesen erhalten wir hinsichtlich der vierten Voraussetzung aus Kapitel I (siehe S. 9):

#### Satz 2

Eine geeignete Wahl für die Konstanten  $\alpha \geq \|B(\psi, \psi)\|$ ,  $\beta \geq \|B(\psi, \cdot)\|$  zu  $\psi \in H^4(\Omega)$  und  $\gamma \geq \|B\|$  ist

$$(2.10) \quad \alpha := \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right|_{0,2}$$

$$(2.11) \quad \beta := \frac{1}{2} (C_3 |\psi|_{1,\infty} + D_1 |\Delta \psi|_{1,2})$$

$$(2.12) \quad \gamma := C_3 D_1$$

Sind auch noch die dritten Ableitungen von  $\psi$  im wesentlichen beschränkt, so besteht neben (2.11) die Alternative:

$$(2.13) \quad \beta := \frac{1}{2} (C_3 |\psi|_{1,\infty} + C_1 |\Delta \psi|_{1,\infty})$$

#### Beweis

Zu (2.10) ist lediglich zu beachten, daß nach Kapitel II, Satz 3  $B(\psi, \psi)$  für  $\psi \in H^4(\Omega)$  aus  $L^2(\Omega)$  ist.

Bezüglich (2.11) greifen wir auf die Ungleichung (1.24) aus Kapitel II, S. 54, zurück, womit für  $u \in U$  und  $\psi \in H^4(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \|B(\psi, u)\| &= \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta u}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right|_{0,2} \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta u}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right|_{0,2} + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right|_{0,2} \right) \\ &\stackrel{\text{II. (1.24)}}{\leq} \frac{1}{2} \left( |\psi|_{1,\infty} |\Delta u|_{1,2} + |\Delta \psi|_{1,2} |u|_{1,\infty} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( |\psi|_{1,\infty} C_3 + |\Delta \psi|_{1,2} D_1 \right) |\Delta^2 u|_{0,2} \end{aligned}$$

Da  $|\Delta^2 u|_{0,2} = \|u\|_U$ , folgt hieraus (2.11). Bei der Anwendung von II. (1.24) beachte man, daß  $u \in U$  und  $\psi \in H^4(\Omega)$  gemäß der Einbettung (i) auch Elemente von  $H^{1,\infty}(\Omega)$  sind. Ist auch  $\Delta \psi \in H^{1,\infty}(\Omega)$ , so gilt die obige Abschätzung analog mit  $|\Delta \psi|_{1,\infty} |u|_{1,2}$  anstelle von  $|\Delta \psi|_{1,2} |u|_{1,\infty}$ , was unmittelbar auf (2.13) führt.

Da  $B$  symmetrisch und  $U$  unitär sind, können wir uns bei der Abschätzung von  $\|B(u, v)\|$  auf den Fall  $u = v \in U$  beschränken. Mit entsprechender Begründung wie oben folgt:

$$\begin{aligned} \|B(u, u)\| &= \left| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Delta u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right|_{0,2} \stackrel{\text{II. (1.24)}}{\leq} |u|_{1,\infty} |\Delta u|_{1,2} \\ &\leq D_1 |\Delta^2 u|_{0,2} C_3 |\Delta^2 u|_{0,2} = D_1 C_3 \|u\|_U^2 \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

#### Bemerkungen

1. Nach Kapitel III (siehe Satz 5, S. 96 und Lemma 3, S. 100) können wir  $D_1$  durch  $\frac{a}{2} C_3$  ersetzen, wenn  $\Omega$  in einem Kreis vom Radius  $a$

enthalten ist. Durch die spezielle Gestalt der Bilinearität und der Normwahl ist damit insgesamt lediglich die Kenntnis der Konstanten  $C_3$  von Nöten. Bei entsprechender Wahl der Konstanten wird  $\beta$  zu  $C_3$  und  $\gamma$  zu  $C_3^2$  proportional. Mit  $\psi_{St}$  als Anfangsnäherung erhält man dann für den ersten kritischen Wert von  $Re$  gemäß (4.37), Kapitel I, S. 39

$$(2.14) \quad Re^+ = \frac{1}{2(\beta + \sqrt{\alpha\gamma})} = \frac{K_{St}}{C_3},$$

wobei die Konstante  $K_{St}$  lediglich von  $\psi_{St}$  abhängt. Nach Bemerkung 2, S. 133 gilt dies in der ursprünglichen Bedeutung der Reynoldszahl nur im Fall  $r = 0$ . Im Fall  $r \neq 0$ , aber homogener Randbedingungen ist gemäß (1.14) auf der linken Seite von (2.14) das Quadrat von  $Re^+$  einzusetzen, wenn sich  $\alpha$  und  $\beta$  bzw.  $K_{St}$  auf die Stokesche Näherung zu  $Re := 1$  beziehen. Da bei homogenen Randbedingungen die Abschätzungen auf  $U$  auch für  $\psi_{St}$  gelten, läßt sich für diesen Fall unmittelbar eine apriori-Abschätzung (d.h. ohne Kenntnis von  $\psi_{St}$ ) für den ersten Geltungsbereich der Konvergenzsätze angeben. Aus

$$\alpha = \left| \frac{\partial \psi_{St}}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi_{St}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{St}}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi_{St}}{\partial x} \right|_{0,2} \leq |\psi_{St}|_{1,0} |\Delta \psi_{St}|_{0,2}$$

$$\leq D_1 C_3 |\Delta^2 \psi_{St}|_{0,2}^2$$

$$\beta = \frac{1}{2} (|\psi_{St}|_{1,0} C_3 + |\Delta \psi_{St}|_{1,2} D_1) \leq D_1 C_3 |\Delta^2 \psi_{St}|_{0,2}$$

$$\gamma = D_1 C_3$$

$$\Delta^2 \psi_{St} = Re \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

erhalten wir mit  $Re \leq [2(\beta + \sqrt{\alpha\gamma})]^{-1}$  die Bedingung

$$(2.15) \quad Re^2 \leq \left( 4 D_1 C_3 \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\|_{0,2} \right)^{-1}$$

2. Von den Termen her, die bei NSG auftreten, scheint es zunächst sinnvoll, allgemeiner die Norm

$$(2.16) \quad \|u\| := \left( \sum_{k=0}^4 v_k |\nabla^k u|_{0,2}^2 \right)^{1/2}$$

mit geeigneten Gewichten  $v_k \geq 0$  für  $k = 1(1)3$ ,  $v_4 > 0$  zu betrachten. Aus  $|\nabla^k u|_{0,2} \leq C_k |\Delta^2 u|_{0,2}$  ( $C_4 = 1$ ) folgt dann

$$\|u\|' \leq \left[ \left( \sum_{k=0}^4 c_k^2 v_k \right) |\Delta^2 u|_{0,2}^2 \right]^{1/2} \quad \text{und damit für } A = L|_U :$$

$$(2.17) \quad \|A^{-1}\|' \leq \tau := \left( \sum_{k=0}^4 c_k^2 v_k \right)^{1/2}$$

Ist nun  $C'_3$  die entsprechende Konstante mit  $|\nabla^3 u|_{0,2} \leq C'_3 \|u\|'$ , so ist  $\alpha' := \alpha$ ,  $\beta' = \frac{\beta}{C'_3} C'_3$ ,  $\gamma' = \frac{\alpha}{2} C'_3^2$  zu setzen, wenn  $\alpha'$ ,  $\beta'$  und  $\gamma'$  die zu (2.16) passenden Konstanten darstellen. Mit (2.17) erhalten wir anstelle von (2.14)

$$(2.18) \quad \text{Re}^+ = \frac{1}{2\tau(\beta' + \alpha'\gamma')} = \frac{K_{\text{St}}}{\tau C'_3} \quad (K_{\text{St}} \text{ wie in (2.14)}) .$$

Die Terme niedrigerer Ordnung ( $k \leq 2$ ) in (2.16) bringen hinsichtlich der Größe von  $C'_3$  keinen Vorteil; da andererseits

$$\|u\|'^2 \geq v_3 |\nabla^3 u|_{0,2}^2 + v_4 |\Delta^2 u|_{0,2}^2 \geq v_3 |\nabla^3 u|_{0,2}^2 + \frac{v_4}{C'_3} |\nabla^3 u|_{0,2}^2 ,$$

führt dies auf

$$(2.19) \quad C'_3 = \frac{C_3}{\sqrt{v_3 C_3^2 + v_4}}$$

Hiernach ist aber  $\tau C'_3$  minimal und damit  $\text{Re}^+$  aus (2.18) maximal, wenn  $v_0 = v_1 = v_2 = 0$ ,  $v_3 \geq 0$  und  $v_4 > 0$ . Die durch  $L$  induzierte Norm mit  $v_3 := 0$  und  $v_4 := 1$  ist demnach in diesem Rahmen die günstigste und zugleich einfachste Wahl der Norm.

5. Eine das Vorzeichen von  $\text{Re}$  bzw.  $B$  ausnutzende, verbesserte Abschätzung mit  $\beta^*$  anstelle von  $\beta$  gemäß Kapitel I, Satz 1.b, S. 14 erscheint für den Fall der NSG kaum möglich. Eine eindeutige "Polarisation" des inneren Produkts  $(\Delta^2 u, B(\psi, u))_0$  für beliebige  $u \in U$  wird selbst für eine einfache Funktion  $\psi \in H^4(\Omega)$  nur schwer zu beweisen sein. Ein möglicher Zugang ist noch am ehesten über geeignete Monotonieaussagen (vergl. VON WAHL [57]) oder über numerische Methoden (vergl. Anhang II) denkbar. In diesem Zusammenhang sei betont, daß mit der Abschätzung von  $(\Delta^2 u, B(\psi, u))_0$  durch  $\|\Delta^2 u\|_{0,2}$  nicht nur die bloße Existenz der Inversen, sondern auch deren Stetigkeit bezüglich unserer Normierung gesichert wird. Aufgrund der möglichen Mehrdeutigkeit für große  $\text{Re}$  (siehe Abschnitt 1, S. 128) und der Antisymmetrie von  $B$  bezüglich der Koordinaten ist allerdings auch keine besondere Ausrichtung wie etwa im Beispiel aus Kapitel IV zu erwarten; natürlich hängt dies auch noch von  $\psi$  ab.

4. Auch wenn für den Ablauf des Verfahrens nur die Konstanten  $C_3$  und  $D_1$  (evtl. noch  $C_1$ ) von Bedeutung sind, bleiben die übrigen Konstanten nach wie vor von Interesse. Ihre Kenntnis ist für die Interpretation der Ergebnisse von Nutzen, da sich ja zunächst alle Aussagen nur auf  $\|\cdot\|_L = \|\Lambda^2 \cdot\|_{0,2}$  beziehen. Speziell geben  $D_0 \|u\|_L$  und  $D_2 \|u\|_L$  eine Abschätzung für den maximalen Betrag von  $u$  bzw.  $\Delta u$ ; dies führt zu den in der Praxis interessierenden Daten über die Strom- bzw. Wirbelfunktion (nichtverschwindende Rotationskomponente des Geschwindigkeitsfeldes).

Durch Anwendung der Konvergenzsätze aus Kapitel I erhalten wir unter anderem auch Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen hinsichtlich NSG-Lösungen. Ein Vergleich mit den in Abschnitt 1 erwähnten Ergebnissen von LADYSHENSKAJA [30] oder von TEMAM [54] ist nur bedingt möglich. Zunächst ist zu beachten, daß die Existenz einer Stromfunktion aus  $H^4(\Omega)$  ein Geschwindigkeitsfeld aus  $F^3(\Omega)$  induziert. Hierzu benötigen wir dann auch stärkere Glattheitseigenschaften des äußeren Kraftfeldes, des Gebietes und der Randbedingungen als sie in [30] oder in [54] für die Existenz einer schwachen Lösung benötigt werden; beispielsweise müssen wir  $f \in H^1(\Omega)$  voraussetzen, damit  $re \in L^2(\Omega)$  ist. Hinsichtlich der Regularität der Lösungen erhalten wir dementsprechend auch stärkere Aussagen. Unter strengeren Regularitätsvoraussetzungen ist ferner in Abhängigkeit von  $Re$  ein größerer Eindeutigkeitsbereich denkbar. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß die Eindeutigkeitsaussage aus den Konvergenzsätzen - etwa im Vergleich zu (1.8) - nur lokalen Charakter hat.

### Beispiel

Es sei  $\Omega$  der Einheitskreis und  $f(x,y) := (0,x)$ . Die nicht verschwindende Rotationskomponente ist identisch Eins, so daß  $r = Re$ . Mit  $g(x,y) := \frac{1}{2} x^2$  und  $\lambda_1(1,\Omega) = j_{01}^2$  (siehe Anhang I, Tabelle 2) erhalten wir nach (1.8) die Eindeutigkeitsbedingung

$$(2.20) \quad Re^2 < \frac{\sqrt{j_{01}}}{2\sqrt{2} \|g\|_{0,2}} = 2\sqrt{\frac{j_{01}}{\pi}} \doteq 1.75.$$

$$(\|g\|_{0,2}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 [\frac{1}{2} r^2 \cos^2 \theta]^2 r dr d\theta = \frac{3\pi}{96}; \quad \text{vergl. (3.13)})$$

Als ersten Anwendungsbereich für unsere Konvergenzsätze erhalten wir aus (2.15)

$$(2.21) \quad \text{Re}^2 \leq (\text{Re}^+)^2 = 2.72 .$$

In diesem einfachen Fall läßt sich mit

$$(2.22) \quad \psi_{\text{St}}(x,y) = \frac{\text{Re}}{64} (1-x^2-y^2) , \quad x^2+y^2 \leq 1$$

die Stokes'sche Näherung unmittelbar angeben. Da hierfür  $B(\psi_{\text{St}}, \psi_{\text{St}})$  identisch verschwindet, ist  $\psi_{\text{St}}$  auch bereits Lösung des nichtlinearen Problems für alle  $\text{Re} > 0$ . Eine Anwendung unserer Iterationsverfahren wird daher gegenstandslos. Von Interesse bleibt lediglich die Eindeutigkeitsaussage. Für die zu  $\psi_{\text{St}}$  gehörige Konstante  $\beta$  ergibt sich aus (2.13)

$$(2.23) \quad \beta = \frac{\text{Re}}{2} \left( \frac{1}{24\sqrt{3}} C_3 + \frac{1}{2} C_1 \right) \quad (C_1, C_3 \text{ nach Anhang I, Tabelle 2})$$

Zusammen mit  $\alpha = 0$  ( $B(\psi_{\text{St}}, \psi_{\text{St}}) = 0$ ) erhalten wir aus  $\text{Re} \leq \frac{1}{2\beta}$  die Bedingung

$$(2.24) \quad \text{Re}^2 \leq \frac{24\sqrt{3}}{C_3 + 12\sqrt{3} C_1} \doteq 39 .$$

Nach Kapitel I, Satz 4 (B2), S. 30, ist  $\psi_{\text{St}}$  für diese Reynoldszahlen einzige Lösung  $\psi^*$  des Problems mit

$$(2.25) \quad \|\Delta^2 \psi^* - \Delta^2 \psi_{\text{St}}\| \leq r_+ \quad \text{mit} \quad r_+ \geq \frac{1-2\text{Re}\beta}{2\text{Re}y} \quad (\text{vergl. S. 153})$$

Im Vergleich dazu gibt (2.20) zwar einen wesentlich kleineren Parameterbereich an, sichert aber für jene  $\text{Re}$  die globale Eindeutigkeit. Ferner ist zu bedenken, daß in (2.24) gegenüber (2.20) und (2.21) die Kenntnis von  $\psi_{\text{St}}$  einfließt.

### 3. Beispiel 1 - Strömung in einem kreisförmigen Hohlraum

Eine Flüssigkeitsmenge bewege sich innerhalb eines Zylinders. Die Bewegung werde dadurch aufrechterhalten, daß die Flüssigkeitsteilchen auf dem Rand des Zylinders durch die Umgebung mitgerissen werden. Unter Umgebung ist z.B. eine bewegte reibende feste Bewandung zu verstehen, aber auch z.B. eine bewegte Flüssigkeit derselben oder einer anderen Art. Es mögen jedoch keine Flüssigkeitsteilchen aus dem Zylinder austreten. Dieses Modell ist eine spezielle Form der sogenannten "Hohlraumströmung". Mit ihr haben sich bereits viele Autoren befaßt (in der

englischen Literatur zu finden unter den Begriffen "eddy" und "cavity"). Die wichtigsten Ergebnisse werden, soweit sie uns tangieren, im folgenden noch genannt. Die Hohlraumströmung beobachtet man z.B. in Wirbeln hinter umströmten Körpern. Die Form des Zylinders ist dabei als erste Näherung für den entstehenden Hohlraum hinter einer umströmten langen Kante anzusehen. Ist die Strömung entlang der Kante gleichförmig, so genügt es, die Strömung in einer hierzu senkrechten Ebene und damit in einem Kreis zu betrachten. Dies gilt natürlich auch für das zunächst näherliegende Beispiel, wo ein mit Flüssigkeit gefülltes zylinderförmiges Gefäß um seine Längsachse gedreht wird.

Wir setzen voraus, daß die äußeren Kräfte ein Potential besitzen, womit die rechte Seite in (1.11) verschwindet.

Zweckmäßigerweise führen wir Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  ein mit

$$(3.1) \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad r \in [0, a], \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

wobei  $x$  und  $y$  die auf den Nullpunkt des Kreises vom Radius  $a$  bezogenen kartesischen Koordinaten sind. (Da die rechte Seite aus (1.11) hier keine Rolle spielt, sind Mißverständnisse aufgrund der doppelten Bedeutung von  $r$  ausgeschlossen.) Anstelle von (1.9) erhalten wir für den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsfeld und Stromfunktion

$$(3.2) \quad \dot{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \dot{\theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

wobei  $\dot{r}$  die radiale Geschwindigkeit und  $\dot{\theta}$  die Winkelgeschwindigkeit bedeuten. Ferner erhalten wir wegen

$$(3.3) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

anstelle von (1.11) für die Stromfunktion  $\psi$  in  $(r, \theta)$  als Differentialgleichung der ebenen, inkompressiblen, stationären Strömung:

$$(3.4) \quad \Delta^2 \psi + \frac{1}{v} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} \right) = 0$$

( $v > 0$  bezeichnet hier die kinematische Zähigkeit; siehe S. 127)

In Zylinderkoordinaten sind also

$$(3.5) \quad L = \Delta^2 \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad \text{und}$$

$$(3.6) \quad B(\psi, \varphi) = \frac{1}{2} \{ B^*(\psi, \Delta \varphi) + B^*(\varphi, \Delta \psi) \} \quad \text{mit} \quad B^*(u, v) := \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

Da keine Flüssigkeitsteilchen nach außen treten sollen, muß auf dem Rand die radiale Geschwindigkeitskomponente verschwinden. Nach (3.2) ist damit der Kreisrand selbst Stromlinie, d.h. die Stromfunktion hat dort einen konstanten Wert, den wir ohne Einschränkung auf Null setzen. Indem wir uns auf den stationären Fall beschränken, nehmen wir an, daß die Tangentialgeschwindigkeit periodisch ist. Für die Stromfunktion  $\psi$  folgen daraus die Dirichlet'schen Randbedingungen

$$(3.7) \quad \psi(1, \theta) = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial r}(1, \theta) = -g(\theta) \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi) \quad ,$$

wobei  $g$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion des Winkels ist und die tangentiale Randgeschwindigkeit wiedergibt, d.h.

$$(3.8) \quad g(\theta) := \dot{\psi}(1, \theta)$$

Es sei  $\bar{g} \neq 0$  irgendein charakteristischer Wert von  $g$ , z.B. das Maximum oder Minimum. Mit Hilfe dieses Wertes definieren wir die Reynoldszahl  $Re$  durch

$$(3.9) \quad Re := \frac{\bar{g} a^2}{\nu}$$

Mit der Transformation

$$(3.10) \quad r' := \frac{r}{a} \quad , \quad \theta' := \theta \quad , \quad \psi'(r', \theta') := \frac{\psi(r, \theta)}{\bar{g} a^2} \quad , \quad g'(\theta') := \frac{g(\theta)}{\bar{g}}$$

gehen wir zu dimensionslosen Größen über. Für diese gilt die Differentialgleichung (3.4) analog, allerdings jetzt auf dem Einheitskreis und mit  $Re$  als Parameter anstelle von  $\frac{1}{\nu}$ . Im folgenden lassen wir die Strichkennzeichnung wieder fallen.

Damit haben wir es mit einem Problem der in Abschnitt 2 behandelten Art zu tun, wobei  $\Omega$  alle geforderten Glattheitsvoraussetzungen besitzt, da der Einheitskreis vom  $C^\infty$ -Typ ist. Bei genügend glatten Randbedingungen sind auch noch die dritten Ableitungen von  $\psi_{St}$  auf  $\Omega$  beschränkt, so daß wir bezüglich der Konstanten  $\beta$  von der Abschätzung (2.13) ausgehen können. Aus Anhang I, Tabelle 2, entnehmen wir für die relevanten Konstanten:

$$(3.11) \quad C_1 \doteq 0.030625976 \quad , \quad C_3 \doteq 0.428172547 \quad , \quad D_1 \doteq 0.2140862736$$

Hinsichtlich der Normberechnungen beachte man die Formeln:

$$(3.12) \quad u_x^2 + u_y^2 = u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta^2$$

$$(3.13) \quad \int_{\Omega} v(x,y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 v(r,\theta) r dr d\theta$$

Wegen (3.12) resultieren aus der Polarkoordinatendarstellung (3.6) bei analogem Vorgehen wie im Beweis zu Satz 2 für  $\beta$  und  $\gamma$  dieselben Werte. Diese Invarianz bezüglich der Koordinatendarstellung ginge verloren, wenn man die Produkte aus (3.6) einzeln abschätzen würde!

Ist in dem hier betrachteten Beispiel die Randgeschwindigkeit konstant, also  $g = 1$  (nach der Transformation auf dimensionslose Größen), so ist die biharmonische Funktion

$$(3.14) \quad \psi_0 := \frac{1}{2} (1-r^2)$$

die Stokes'sche Näherung. Aus (3.6) ersieht man unmittelbar, daß auch  $B(\psi_0, \psi_0)$  identisch verschwindet.  $\psi_0$  ist also bereits eine Lösung des Problems, und zwar für alle  $Re > 0$ . Variiert  $g$  nur leicht, so erscheint es sinnvoll,  $\psi_0$  als Ausgangsbasis zur Berechnung einer geeigneten Näherung zu verwenden. Die formale Anwendung der Iterationsvorschrift für das NV auf die Gleichung (3.4) ergibt für diese erste Näherung die lineare Differentialgleichung

$$(3.15) \quad \Delta^2 \psi - Re \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \theta} = 0$$

weil in  $\Delta(\psi - \psi_0) + 2ReB(\psi_0, \psi - \psi_0) = -[L\psi_0 + ReB(\psi_0, \psi_0)]$  lediglich der Term mit  $\frac{\partial \psi_0}{\partial r}$  als Korrektur übrig bleibt. Nach Abschnitt 1 bezeichnen wir die Lösung von (3.15) mit den exakten Randwerten als Oseensche Näherung  $\psi_{Os}$ .

Bei BURGGRAB [12] ist  $\psi_{Os}$  allgemein berechnet, nachdem dort für  $g$  eine Fourierreihenentwicklung angenommen wird. Es resultiert für  $\psi_{Os}$  eine entsprechende Reihenentwicklung nach Besselfunktionen, für die die Grenzfälle  $Re \rightarrow 0$  und  $Re \rightarrow \infty$  betrachtet werden. Die Diskussion für  $Re \rightarrow \infty$  ist speziell von Interesse hinsichtlich eines theoretischen Ergebnisses von BATCHELOR [10], wonach sich bei wachsender Reynoldszahl ein geschlossener Bereich in  $\zeta$  ausbildet, auf dem die Rotation  $\omega = -\Delta \psi$  konstant ist; dieser Bereich geht vom Zentrum aus und dehnt sich mit wachsendem  $Re$  zum Rand hin immer weiter aus. Dieses auch in der Praxis beobachtete Phänomen wird durch die asymptotische Entwicklung von  $\psi_{Os}$  für  $Re \rightarrow \infty$  bestätigt. Für  $Re \rightarrow 0$  geht dagegen  $\psi_{Os}$  in

die Stokes'sche Näherung  $\psi_{St}$  über; dies ist mit (3.15) auch zu erwarten. Die Stokes'sche Näherung können wir unmittelbar angeben. Für

$$(3.16) \quad g(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta$$

erhalten wir

$$(3.17) \quad \psi_{St} = \frac{1-r^2}{2} \left[ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \right].$$

Dieser Ausdruck erfüllt die Randbedingung und hat die Form  $(1-r^2)h$ , wobei unter entsprechenden Regularitätsvoraussetzungen an die Reihenentwicklung in (3.16)  $h$  eine harmonische Funktion auf dem Einheitskreis darstellt (vergl. Kapitel III, S. 89). Aus dem Ansatz  $\psi_{St} = (1-r^2)h$  erhält man mit Hilfe der Poissonschen Formel für  $h$  die weitere Darstellung

$$(3.18) \quad \psi_{St} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)^2 g(\varphi)}{1+r^2-2r \cos(\theta-\varphi)} d\varphi.$$

Wie bereits in Abschnitt 1 erwähnt, muß  $\psi_{Os}$  aus (3.15) wohlunterschieden werden von der ersten Newtonnäherung in dem von uns definierten strengen Sinne, die man ausgehend von  $\psi_{St}$  als Anfangsnäherung erhalten würde. Die Berechnung der ersten "echten" Newtonnäherung bereitet allerdings bereits für einfache Fälle große Schwierigkeiten (s.u.). Eine auch gegenüber der Oseenschen Näherung gegebenenfalls leichter auswertbare Funktion ergibt dagegen die erste Näherung aus dem Verfahren der sukzessiven Approximation mit  $\psi_{St}$  als Ausgangsnäherung.

Wir betrachten - wie BURGGRAF [12] und SCHOENHALS [46] - den Spezialfall, wo

$$(3.19) \quad g(\theta) := -\frac{1}{2} (1 + \cos \theta).$$

Für die Stokes'sche Näherung erhalten wir hier:

$$(3.20) \quad \psi_{St} = \frac{1}{4} (1-r^2)(1+x)$$

$$(3.21) \quad \psi_{St} = -\frac{1}{4} \psi_{St} - 1+2x$$

$$(3.22) \quad \frac{\partial \psi_{St}}{\partial x} = \frac{1}{4} [1-r^2-2x(1+x)], \quad \frac{\partial \psi_{St}}{\partial y} = -\frac{y}{2} (1+x), \quad \frac{\partial \psi_{St}}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial \psi_{St}}{\partial y} = 0$$

$$(3.23) \quad B(\psi_{St}, \psi_{St}) = -y(1+x)$$

Für die Oseensche Näherung gilt nach BURGGRAF [12]:

$$(3.24) \quad \psi_{0s} = \frac{1-r^2}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \operatorname{Im} \left\{ \frac{I_1(\sqrt{i\operatorname{Re}})r - I_1(r\sqrt{i\operatorname{Re}})}{\sqrt{i\operatorname{Re}} I_2(\sqrt{i\operatorname{Re}})} e^{i\theta} \right\}$$

$$(3.25) \quad \omega_{0s} = -\Lambda \psi_{0s} = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{i\operatorname{Re}} \frac{I_1(r\sqrt{i\operatorname{Re}})}{I_2(\sqrt{i\operatorname{Re}})} e^{i\theta} \right\}.$$

$I_k$  ( $k = 1, 2$ ) bezeichnet hierbei die modifizierte Besselfunktion erster Art und  $k$ -ter Ordnung (vergl. z.B. WATSON [58]).

Wählen wir  $\psi_{st}$  als Ausgangsnäherung, so folgt aus der Iterationsvorschrift für SA (Kapitel I, Lemma 7.a, S. 18) hinsichtlich der ersten Korrektur  $c_o^{SA}$ :

$$(3.26) \quad \Delta^2 c_o^{SA} = \operatorname{Re} y(1+x) \quad ; \quad c_o^{SA} \Big|_{r=1} = \frac{\partial c_o^{SA}}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0$$

Hieraus erhält man für  $\psi_1^{SA} = \psi_{st} + c_o^{SA}$  und  $\omega_1^{SA} = -\Lambda \psi_1^{SA}$ :

$$(3.27) \quad \psi_1^{SA} = \frac{1}{4} (1-r^2)(1+x) + \frac{\operatorname{Re}}{192} \left[ (1-r^2)^2 \left( y + \frac{xy}{2} \right) \right]$$

$$(3.28) \quad \omega_1^{SA} = 1 + 2x + \frac{\operatorname{Re}}{24} \left[ (2-3r^2)y + (3-4r^2) \frac{xy}{2} \right]$$

$\psi_1^{SA}$  wurde von SCHOENHALS [46] übernommen; dort wird überdies die zweite SA-Näherung  $\psi_2^{SA}$  berechnet (vergl. [46], S. 55 bzw. 57-60).

Bezüglich der ersten NV-Näherung  $\psi_1^{NV} = \psi_{st} + c_o^{NV}$  erhalten wir aus der NV-Vorschrift (Kapitel I, Lemma 7.c, S. 18) für die Korrektur das lineare RWP:

$$(3.29) \quad \Delta^2 c_o^{NV} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{4} (1-r^2 - 2x - 2x^2) \frac{\partial \Delta c_o^{NV}}{\partial y} + \frac{y}{2} (1+x) \frac{\partial \Delta c_o^{NV}}{\partial x} - 2 \frac{\partial c_o^{NV}}{\partial y} \right\} = \operatorname{Re} y(1+x)$$

$$c_o^{NV} \Big|_{r=1} = \frac{\partial c_o^{NV}}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0$$

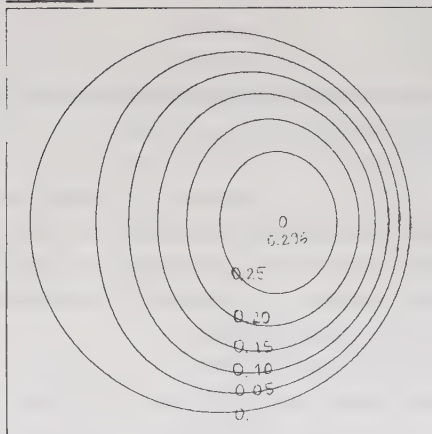
Entsprechend gilt für die erste TV-Näherung:  $\psi_1^{TV} = \psi_{st} + c_o^{NV} + d_o$ , wobei  $d_o$  Lösung des Problems aus (3.29) ist mit  $-\operatorname{Re} B(c_o^{NV}, c_o^{NV})$  anstelle von  $\operatorname{Re} y(1+x)$  als rechter Seite. Für die Lösung von (3.29) wurde ein FORTRAN-Programm erstellt, wo nach entsprechender Diskretisierung die Korrekturen auf einem "Gitter" durch numerische Differenziation näherungsweise bestimmt werden (s. Anhang II.A). Hiermit läßt sich auch das vereinfachte Newtonverfahren NV1 (Kapitel I, Lemma 7.b) durchführen, indem für jeden Iterationsschritt lediglich die rechte Seite in (3.29) neu bereitzustellen ist.

In den folgenden Plotfiguren sind die obigen Näherungen für verschiedene Reynoldszahlen durch die Höhenlinienbilder der Stromfunktion und der zugehörigen Wirbelfunktion dargestellt (vergl. Abschnitt 1, S. 129). Für kleine  $Re$  ( $Re \leq 1$ ) differieren die verschiedenen Näherungen nur wenig voneinander; für  $Re = \frac{1}{2}$  und  $Re = 1$  ergeben die Oseensche wie die erste NV- und erste TV-Näherung praktisch das gleiche Bild wie die dargestellte erste SA-Näherung. Man sieht, daß sich auch noch die Stokes'sche Näherung in diesem  $Re$ -Bereich gut einordnet; Unterschiede sind noch am ehesten an der Wirbelfunktion feststellbar.

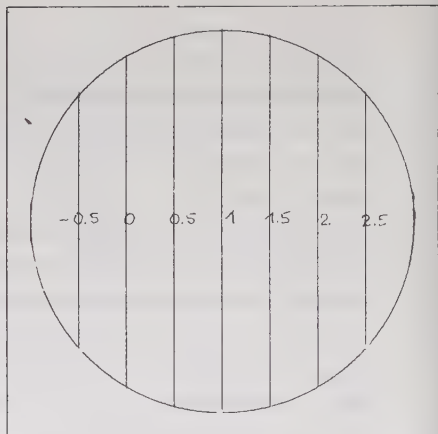
Mit wachsendem  $Re$ , d.h. mit stärkerem Einfluß des antisymmetrischen Bilinearteils, geht die bei  $\psi_{St}$ ,  $\omega_{St}$  gegebene Symmetrie bezüglich der  $x$ -Achse immer mehr verloren. Für  $Re = 10$  sind bereits auch Unterschiede der Näherungen untereinander erkennbar. Die Übereinstimmung der NV-Näherung mit der Oseenschen deutet darauf hin, daß durch die Linearisierung (3.15) der wesentliche Term berücksichtigt wurde. Die Unregelmäßigkeiten beim Höhenlinienbild für  $\omega_1^{NV}$  am Kreisrand sind auf die Diskretisierung zurückzuführen (insbesondere aufgrund der Fortsetzung durch Null außerhalb von  $K_1$ ; siehe Anhang II.A). Von daher ist aufgrund ihrer analytischen Darstellung die Verwendung der Oseenschen Näherung vorteilhafter, auch wenn die NV- oder TV-Näherungen prinzipiell als besser einzustufen sind.

Bei Einschätzung der SA-Näherung ersieht man bereits aus (3.28), daß  $\omega_1^{SA}$  den eingangs erwähnten Effekt für  $Re \rightarrow \infty$  nicht wiedergibt. (Die Höhenlinie  $\omega_1^{SA} = 1$  geht stets durch den Nullpunkt; vergl. auch  $\omega_1^{SA}$  und  $\omega_{Os}$  zu  $Re = 100$  in Figur 3.)

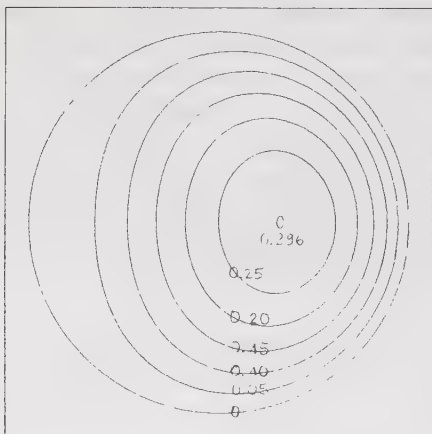
Figur 1



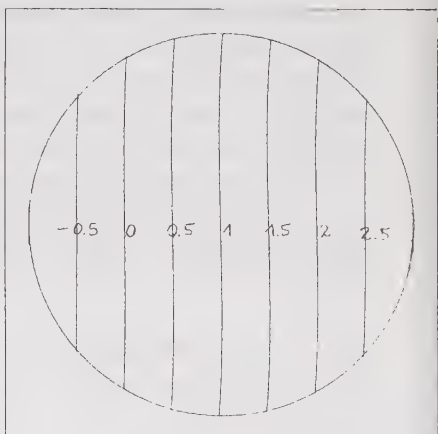
$\psi_{st}$



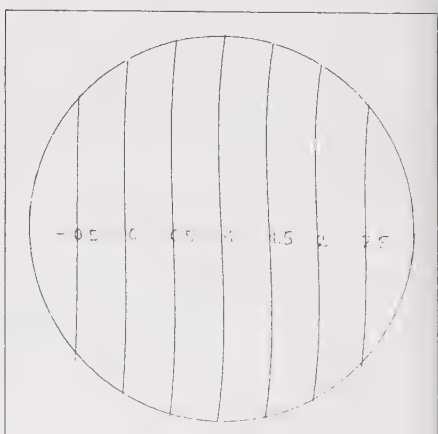
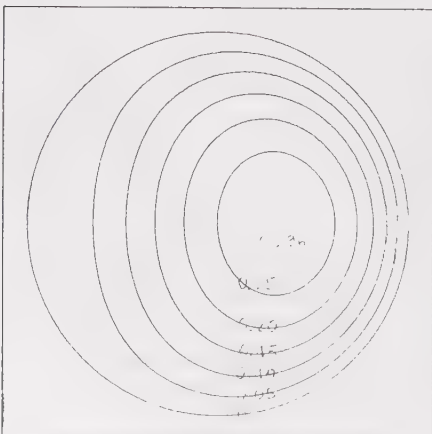
$w_{st}$



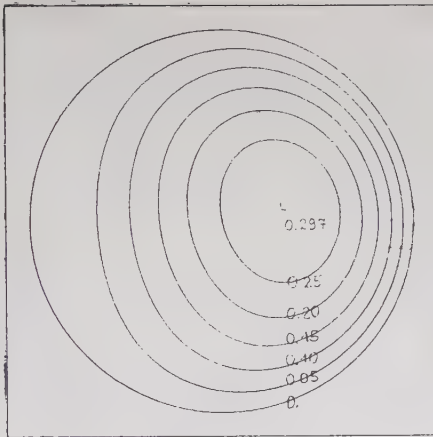
$\psi_{SA}$   $Re = 0.5$



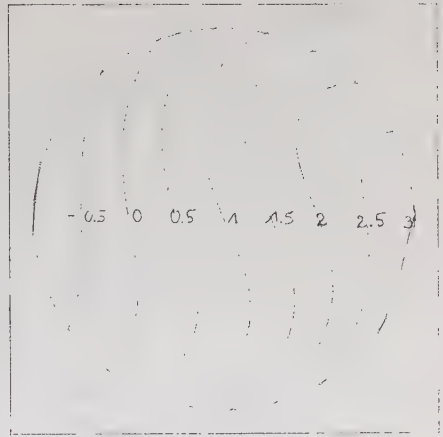
$w_{SA}$   $Re = 0.5$



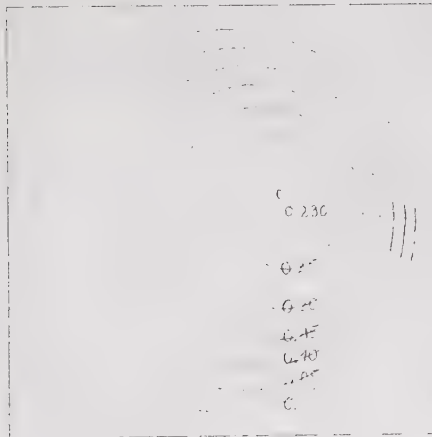
Figur 2



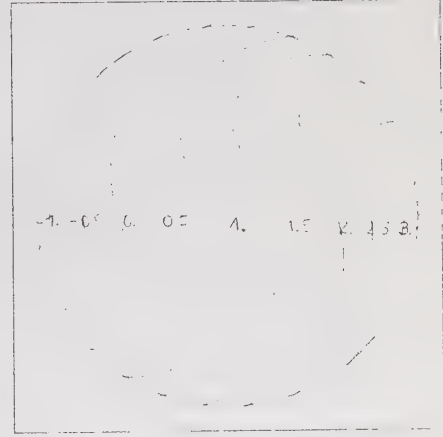
$\psi_{SA}$   $Re = -10$



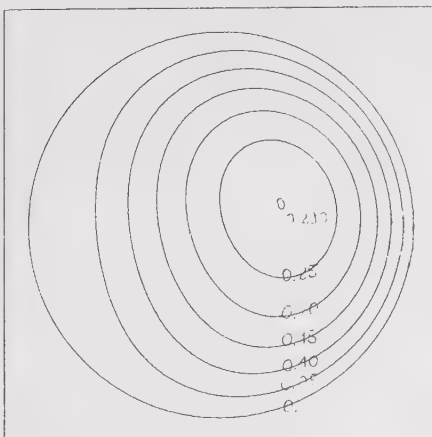
$\omega_{SA}$   $Re = -10$



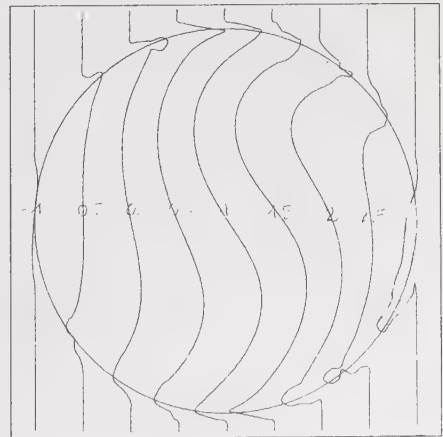
$\psi_{OS}$   $Re = -10$



$\omega_{OS}$   $Re = -10$

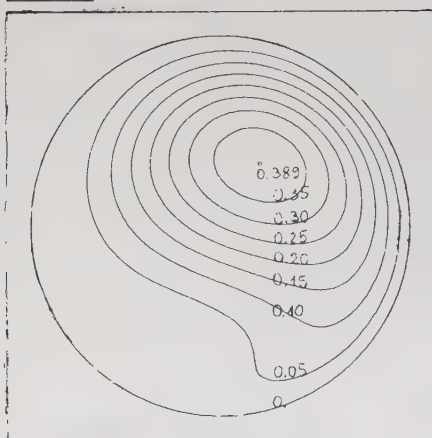


$\psi_{NV}$   $Re = -10$

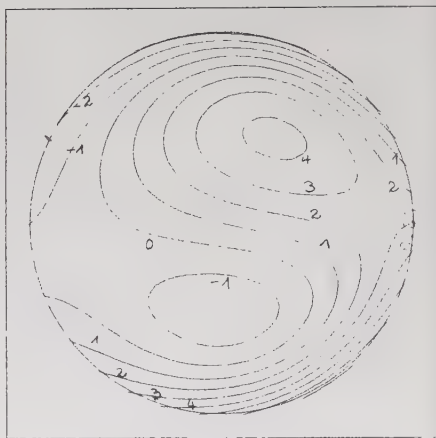


$\omega_{NV}$   $Re = -10$

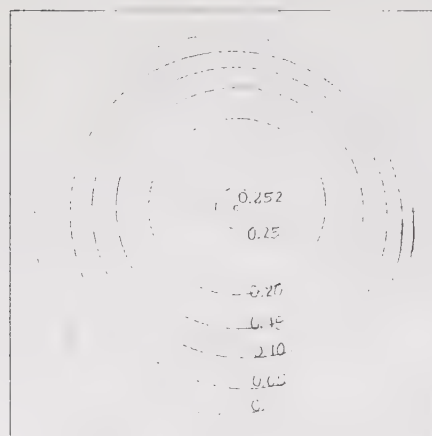
Figur 3



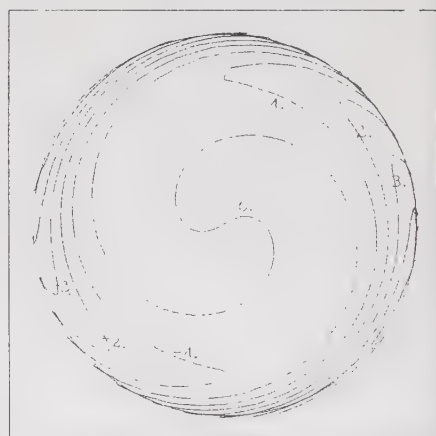
$\psi_1^{SA}$   $Re = 100$



$\omega_1^{SA}$   $Re = 100$



$\psi_{0s}$   $Re = 100$



$\omega_{0c}$   $Re = 100$

Mit ihrer analytischen Darstellung sind  $\psi_1^{SA}$  und  $\psi_2^{SA}$  formal für beliebig große Reynoldszahlen gegeben. Ebenso lassen sich bei der numerischen Bestimmung von  $\psi_1^{NV}$  oder  $\psi_1^{TV}$  die zu (3.29) gehörigen Differenzengleichungen so aufstellen, daß das lineare Gleichungssystem auch noch für größere  $Re$  auflösbar ist. Die obige Diskussion für  $Re \rightarrow \infty$  sowie die Betrachtungen in Anhang II drängen die Frage auf, inwieweit diese Näherungen einer exakten Lösung entsprechen. Wir untersuchen hierzu mit unseren Methoden, für welche  $Re$  die Voraussetzung für die Konvergenz von  $SA$ ,  $NV$  und  $TV$  ausgehend von  $\psi_{St}$  als Anfangsnäherung erfüllt sind, und geben innerhalb dieses Konvergenzbereiches eine Fehlerabschätzung für die obigen Näherungen an. Nach Satz 2 folgt zunächst:

$$(3.30) \quad \alpha = \|B(\psi_{St}, \psi_{St})\|_{0,2} = \left( \int_0^{2\pi} \int_0^1 [r \sin \theta (1+r \cos \theta)]^2 r \, dr \, d\theta \right)^{1/2} : \\ = \sqrt{\frac{7\pi}{24}} \doteq 0.9572345$$

$$(3.31) \quad \beta = \frac{1}{2} (C_3 |\psi_{St}|_{1,\infty} + C_1 |\Delta \psi_{St}|_{1,\infty}) \\ (3.22) \quad = \frac{1}{2} (C_3 + 2C_1) \doteq 0.24471224$$

$$(3.32) \quad \gamma = C_3 D_1 \doteq 0.09166587$$

Als ersten Gültigkeitsbereich erhalten wir hieraus nach Kapitel I, (4.37), S. 39:

$$(3.33) \quad Re \leq Re^+ = \frac{1}{2(\beta + \sqrt{\alpha\gamma})} \doteq 0.924331796$$

Für  $Re \in [0, Re^+]$  gelten die Aussagen von Satz 4, Kapitel I, S. 30, mit  $x_M := \psi_{St}$  und  $\varepsilon := Re \, \alpha$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  gemäß (3.30) bis (3.32)). Für die Reynoldszahlen  $Re := 0.1$  und  $Re := 0.5$  ergeben sich dabei z.B. die Werte aus der folgenden Tabelle. Die Fehlerschranken erhalten wir aus (B4) S. 30-31. Für  $NV$  und  $TV$  wurden die apriori-Schranken eingesetzt.

Bei  $SA$  ist  $\zeta_0 = \|\Lambda^2 c_0^{SA}\|_{0,2} = \|F_0\|_{0,2} = Re \, \alpha = \varepsilon$  (vergl. Lemma 7, (3.9), S. 18). Zur Bestimmung von  $\zeta_1 = \|\Lambda^2 c_1^{SA}\|_{0,2}$  wurde benutzt, daß  $\Lambda^2 c_1^{SA} = \Lambda^2 \psi_2^{SA} - \Lambda^2 \psi_1^{SA} = Re^2 f + R^3 g$  mit in  $L^2(\Gamma)$  orthogonalen Funktion  $f$  und  $g$  (vergl. SCHOENHALS [46], S. 57), so daß

$$(3.34) \quad \zeta_1 = \|Re^2 f + Re^3 g\|_{0,2} = Re^2 (\|f\|_{0,2}^2 + Re^2 \|g\|_{0,2}^2)^{1/2}$$

Die numerische Auswertung der entsprechenden Integrale ergibt

$$(3.35) \quad \|f\|_{0,2}^2 \doteq 0.3998301 \cdot 10^{-3}, \quad \|g\|_{0,2} \doteq 0.244 \cdot 10^{-7},$$

so daß wegen  $Re < 1$

$$(3.36) \quad \zeta_1 \doteq 0.02 Re^2.$$

Mit  $\zeta_1$  erhalten wir aus (B4) die aposteriori Schranke für die von SCHOENHALS [46] berechnete Näherung  $\psi_2^{SA}$ . Die Fehlerschranken für  $\psi_1^{SA}$  und  $\psi_{St}$  basieren auf dem geringen Unterschied von  $\psi_1^{SA}$  bzw.  $\psi_{St}$  zu  $\psi_2^{SA}$ , indem

$$(3.37) \quad \|\Delta^2 \psi^* - \Delta^2 \psi_1^{SA}\|_{0,2} \leq \|\Delta^2 \psi^* - \Delta^2 \psi_2^{SA}\|_{0,2} + \zeta_1 \quad \text{bzw.}$$

$$(3.38) \quad \|\Delta^2 \psi^* - \Delta^2 \psi_{St}\|_{0,2} \leq \|\Delta^2 \psi^* - \Delta^2 \psi_1^{SA}\|_{0,2} + \zeta_0$$

|                                                                                                                                                                                                                                                      |            |         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------|
| Konstanten aus Kapitel I, Satz 4<br>und obere Schranken für $\ \Delta^2 \psi^* - \Delta^2 \tilde{\psi}\ _{0,2}$<br>mit $\tilde{\psi} := \psi_{St}, \psi_1^{SA}, \psi_2^{SA}, \psi_1^{NV}, \psi_1^{TV}$<br>gemäß (B4) von S. 30-31, (3.37) und (3.38) |            |         |
| Re                                                                                                                                                                                                                                                   | 0.1        | 0.5     |
| $\tau$                                                                                                                                                                                                                                               | 0.049      | 0.245   |
| $\xi$                                                                                                                                                                                                                                                | 0.096      | 0.479   |
| h                                                                                                                                                                                                                                                    | 0.00194    | 0.077   |
| Abschätzung für $\psi_{St}$                                                                                                                                                                                                                          | 0.096      | 0.486   |
| Abschätzung für $\psi_1^{SA}$                                                                                                                                                                                                                        | 0.000211   | 0.00703 |
| Abschätzung für $\psi_2^{SA}$                                                                                                                                                                                                                        | 0.000011   | 0.00203 |
| Abschätzung für $\psi_1^{NV}$                                                                                                                                                                                                                        | 0.000098   | 0.02645 |
| Abschätzung für $\psi_1^{TV}$                                                                                                                                                                                                                        | 0.00000019 | 0.00212 |

Mit Hilfe der in Kapitel III berechneten Konstanten erhalten wir aus diesen Abschätzungen z.B. unmittelbar Kenntnis über die jeweiligen Maximalabweichungen hinsichtlich Stromfunktion ( $\psi$ ), zugehörigem Geschwindigkeitsfeld ( $(u_r, \frac{1}{r}u_\theta) = \nabla \psi$ ) und Rotation ( $\omega = -\Delta \psi$ ) vermöge

$$(3.39) \quad \max_{\Omega} |\psi^* - \tilde{\psi}| \leq D_0 \|\Delta^2 \psi^* - \Delta^2 \tilde{\psi}\|_{0,2}$$

$$(3.40) \quad \max_{\Omega} \left[ (u_r^* - \tilde{u}_r)^2 + \left( \frac{1}{r} u_\theta^* \right)^2 \right]^{1/2} \leq D_1 \|\Delta^2 \tilde{\psi}\|_{0,2}$$

$$(3.41) \quad \max_{\Omega} |\omega^* - \tilde{\omega}| \leq D_2 \|\Delta^2 \psi^* - \Delta^2 \tilde{\psi}\|_{0,2}$$

mit  $D_0 < 0.049$ ,  $D_1 < 0.215$  und  $D_2 < 2.62$ .

Bezogen auf das absolute Maximum  $\|\psi^*\|_{0,\infty} \approx 0.25$  folgt daraus zum Beispiel, daß  $\psi_2^{SA}$  für  $Re = 0.1$  nur um ca. 0.0002 % und für  $Re = 0.5$  um 0.04 % von der jeweiligen exakten Stromfunktion maximal abweicht. Die geschätzte prozentuale Maximalabweichung für die Rotation ist gemäß den Verhältnissen von  $D_2$  zu  $D_0$  und von  $\|\psi^*\|_{0,\infty}$  zu  $\|\omega^*\|_{0,\infty} \approx 3.0$  fast fünfmal so groß.

Aus (B2) (Kap. I, Satz 4, S. 30) erhalten wir für  $\psi^*$  um  $\psi_{St}$  den Eindeutigkeitsbereich  $\|\Delta^2 \psi - \Delta^2 \psi_{St}\|_{0,2} \leq r_+$ , wobei

$$r_+ = \frac{1 + \sqrt{1-2h}}{h(1-2Re\beta)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{(1 + \sqrt{1-2h})(1-2Re\beta)}{2Re\gamma} \geq \frac{1-2Re^+\beta}{2Re\gamma}$$

mit  $\beta, \gamma$  aus (3.31) - (3.32). Hiernach wäre für eine gegebenenfalls weitere Lösung  $\tilde{\psi}^*$  zu  $Re \in (0, Re^+]$

$$(3.42) \quad \|B(\tilde{\psi}^*, \tilde{\psi}^*)\|_{0,2} > \frac{1-2Re^+\beta}{2Re^2\gamma} = \frac{\text{const.}}{Re^2} \quad \text{mit const.} \approx 2.98$$

(Man beachte:  $\Delta^2 \psi^* + Re B(\psi^*, \psi^*) = \Delta^2 \psi_{St} = 0$ )

Nach dem in Kapitel I, S. 40 beschriebenen Verfahren betten wir nun SA in eine äußere Iteration ein, um ausgehend von der zu  $Re^+$  berechneten Näherung  $\psi_1^{SA}$  eine geeignete Näherungslösung für  $Re > Re^+$  zu gewinnen. Die Bestimmung von  $Re^+$  aus den Daten für  $\psi_{St}$  und die Berechnung von  $\psi_1^{SA}$  sehen wir dabei als 1. Einbettungsschritt an. Dementsprechend setzen wir:

$$(3.43) \quad Re_0 := 0, \quad w_{0,1} := \psi_{St}, \quad \alpha_1 := \alpha, \quad \beta_1 := \beta \quad \text{aus (3.30) - (3.31)}$$

$$Re_1 := Re^+ \quad \text{aus (3.33)}, \quad w_{0,2} := \psi_1^{SA} \quad \text{aus (3.27) zu } Re := Re_1$$

Zur Anwendung von Satz 5, Kapitel I, S. 34, mit  $x_M := w_{0,2}$ ,  $\mu := Re_1$  bestimmen wir die zu  $w_{0,2}$  gehörigen Konstanten  $\alpha := \alpha_2$  und  $\beta := \beta_2$ . Einen geeigneten Wert für  $\alpha_2$  erhalten wir aus:

$$\begin{aligned}
 (3.44) \quad \alpha_2 &= \|B(\psi_1^{SA}, \psi_1^{SA})\|_{0,2_{I.(3.9)}} = \|B(\psi_{St}, \psi_{St}) - \frac{1}{\text{Re}_1} \text{Lc}_1^{SA}\|_{0,2} \\
 &\leq \|B(\psi_{St}, \psi_{St})\|_{0,2} + \frac{1}{\text{Re}_1} \|\Lambda^2 c_1^{SA}\|_{0,2} \leq \alpha_1 + \frac{\zeta_1}{\text{Re}_1} \\
 &\stackrel{=}{=} 0.97572 \\
 (3.36)
 \end{aligned}$$

Für  $\beta_1$  wurden numerisch, d.h. auf einem Gitter von  $\Omega$  (über 8000 äquidistant verteilte Gitterpunkte im Einheitskreis) die Maximalwerte von

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Delta w}{\partial \theta}\right)^2, \quad w := \psi_1^{SA}$$

bestimmt (die betreffenden Ableitungen, die wegen ihres Umfangs hier nicht angegeben werden, wurden dazu analytisch berechnet). Daraus ergibt sich

$$(3.45) \quad \beta_2 = \frac{1}{2} \left( C_3 \|\psi_1^{SA}\|_{1,\infty} + C_1 \|\Delta \psi_1^{SA}\|_{1,\infty} \right) \doteq 0.2608.$$

Wir sehen, daß sich  $\beta_2$  gegenüber  $\beta_1$  geringfügig erhöht hat (entsprechend dem Anwachsen der Ableitungen - vergl. Plotskizze), aber (V2) aus Satz 5, Kapitel I, erfüllt ist. Ebenso gilt die dortige Bedingung (V3), indem

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \varepsilon_2 := \|L\psi_1^{SA} + \text{Re}_1 B(\psi_1^{SA}, \psi_1^{SA})\|_{0,2_{I.(3.9)}} = \|\text{Lc}_1^{SA}\|_{0,2} \\
 &= \zeta_1 < 0.02 \text{Re}_1^2 \doteq 0.0171 \quad \text{und andererseits} \\
 \frac{(1-2\beta_2 \text{Re}_1)^2}{4\text{Re}_1 \gamma} &\doteq 1.699.
 \end{aligned}$$

Mit  $a_2 := \alpha_2 \gamma - \beta_2^2$ ,  $b_2 := \beta_2 - \alpha_2 \text{Re}_1 \gamma + \varepsilon_2 \gamma$  erhalten wir nach Satz 5, Kapitel I als Eingrenzung im zweiten Einbettungsschritt

$$(3.46) \quad \text{Re}_2 = \frac{1}{2(b_2 + \sqrt{a_2 + b_2^2})} \doteq 1.21599$$

Es sei angemerkt, daß man einen ca. 10 % kleineren Wert für  $\text{Re}_2$  erhält, wenn man  $\beta_2$  gemäß der Abschätzung

$$(3.47) \quad \beta_2 \leq \beta_1 + \text{Re}_1 \gamma \alpha_1 \doteq 0.3258 \quad (\text{vergl. I.(4.40)})$$

wählt; der genaue Wert für  $\alpha_2$  würde dagegen eine Verbesserung maximal in der 4. Stelle bewirken. Dies rechtfertigt den obigen, gegenüber der Bestimmung von  $\alpha_2$  relativ hohen Aufwand für  $\beta_2$ .

Für SA kennen wir nach Kapitel I, Bemerkung 2, S. 41, bereits die erste Näherung  $w_{1,2}$  im zweiten Einbettungsschritt, indem

$$(3.48) \quad w_{1,2} = \psi_{St} + \frac{Re_2}{Re_1} (\psi_2^{SA} - \psi_{St}).$$

Hierzu ist in (4.45), S. 41,  $N := n := 1$ ,  $\lambda_2 := Re_2$ ,  $\lambda_1 := Re_1$ ,  $x_{0,1} = \psi_{St}$ ,  $x_{0,2} = \psi_1^{SA}$ ,  $x_{2,1} = \psi_2^{SA}$  zu setzen.

Interessiert die erste Näherung zu irgendeiner Reynoldszahl

$Re \in [Re_1, Re_2]$ , so ist in (3.48) lediglich  $Re_2$  durch  $Re$  zu ersetzen.

In Ergänzung zu den Angaben auf Seite 149 seien die Werte bei der Anwendung von Satz 4, Kapitel I für  $Re = 1$  angegeben:

| $\tau$ , $\xi$ , $h$ und apriori-Abschätzungen für $\tilde{\psi}$ gemäß Satz 4 zu $Re = 1$                                                |                                                           |                                             |                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $\tau = 2\beta_2 \doteq 0.522$ , $\xi = \varepsilon_2 + (1-Re_1)\alpha_2 \doteq 0.091$ , $h = \frac{2\gamma\xi}{(1-\tau)^2} \doteq 0.073$ |                                                           |                                             |                                             |
| $\tilde{\psi}$                                                                                                                            | $\ \Lambda^2 \psi^* - \Delta^2 \tilde{\psi}\ _{0,2} \leq$ | $\ \psi^* - \tilde{\psi}\ _{0,\infty} \leq$ | $\ \psi^* - \tilde{\psi}\ _{0,\infty} \leq$ |
| $w_{0,2}^{SA}$                                                                                                                            | 0.1975                                                    | 0.00967                                     | 0.517                                       |
| $w_{1,2}^{SA}$                                                                                                                            | 0.1066                                                    | 0.00522                                     | 0.279                                       |
| $w_{1,2}^{NV}$                                                                                                                            | 0.0075                                                    | 0.000366                                    | 0.0196                                      |
| $w_{1,2}^{TV}$                                                                                                                            | 0.000566                                                  | 0.000028                                    | 0.00148                                     |

Hierbei ist  $w_{0,2}^{SA} := \psi_1^{SA}$  zu  $Re := Re_1$  und  $w_{1,2}^{SA}$  gemäß (3.48) mit  $Re := 1$ .  $w_{1,2}^{NV}$  und  $w_{1,2}^{TV}$  bezeichnen die entsprechende erste NV- bzw. TV-Näherung; im Gegensatz zur SA-Näherung müssen diese von Grund auf neu berechnet werden.

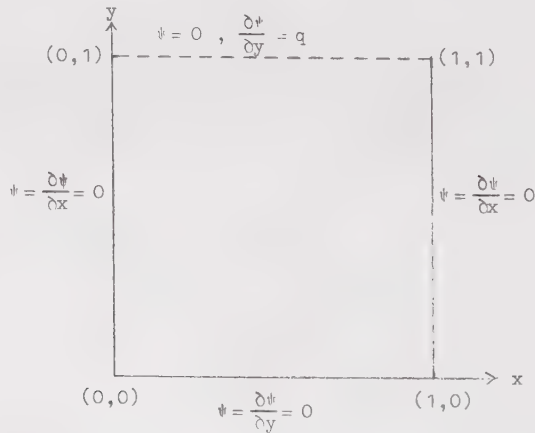
Mit  $w_{1,2}$  aus (3.48) ließe sich nun wiederum ein weiterer Einbettungsschritt ausführen. Allerdings werden die zugehörigen Berechnungen immer komplizierter und sind analytisch kaum noch ausführbar. Wir weisen deshalb diesbezüglich auf das Beispiel des nächsten Abschnitts, wo wir ohnehin auf numerische Methoden angewiesen sind. Allerdings ist hier ohne weitere Rechnung abzusehen, daß der Einbettungsprozeß noch bei einem  $Re$ -Wert unterhalb von  $1/2\beta_1 \doteq 1.923$  zum Stillstand kommt, weil die  $\beta$ -Werte mit  $Re$  wachsen und die Anwendung unseres Verfahrens durch die Bedingung  $2\beta Re < 1$  eingeschränkt ist (vergl. S. 42).

#### 4. Beispiel 2 - Strömung in einem einseitig offenen Gefäß

Wir behandeln hier das Modell eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes, einfachheitshalber von quadratischem Querschnitt. Wir nehmen an, daß das Gefäß relativ zu seinem Querschnitt sehr lang ist und die Strömung auf die Länge des Gefäßes gesehen gleich ist. In diesem Fall können wir uns auf die Betrachtung eines Querschnitts beschränken und wir haben es wieder mit einem ebenen Strömungsproblem zu tun. Die zugehörige Stromfunktion  $\psi$  genügt also der Differentialgleichung (1.11), wobei sich die Reynoldszahl  $Re$  aus den Eigenschaften der Flüssigkeit, der Größe des Querschnitts und einer charakteristischen Geschwindigkeit bestimmt. Letztere ergibt sich in natürlicher Weise aus den Randbedingungen für  $\psi$ . Wir betrachten ein einseitig offenes Gefäß, wo die einseitige Flüssigkeit auf der offenen Seite in gewisser Weise angeregt wird, ohne daß Flüssigkeit ein- oder austritt.

Aufgrund des Zusammenhanges zwischen  $\psi$  und dem Geschwindigkeitsfeld ist wegen der letzten Bedingung  $\frac{\partial \psi}{\partial \tau}|_{\Gamma} = 0$  bzw.  $\psi|_{\Gamma} = \xi_0 := \text{const.}$  zu setzen; ferner verschwindet die Normalenableitung an der festen Berandung, während entlang der offenen Kante  $\frac{\partial \psi}{\partial \nu} =: q$  die dortige Strömungsgeschwindigkeit angibt. Als charakteristische Geschwindigkeit bietet sich dabei der maximale Betrag von  $q$  an. Dank des Transformationsinhaltes von  $Re$  können wir ohne Einschränkung  $\|q\|_{0,\infty} = 1$  annehmen

Figur 4



und ferner von einem Quadrat der Kantenlänge Eins ausgehen, wobei die linke und untere Kante auf die Koordinatenachsen fallen (siehe Figur 4).

$q$  ist dabei als Funktion auf  $[0,1]$  erklärt. Gehen wir davon aus, daß links und rechts der oberen Kante eine feste Berandung ist, an der die Flüssigkeitsteilchen wieder haften und auf Null abgebremst werden, so muß  $q$  für  $x := 0$  und  $x := 1$  verschwinden. Entsprechend der Bezeichnungsweise in Satz 1 sei auf dem Rand die Funktion  $g_1$  dadurch erklärt, daß sie auf der linken, unteren und rechten Kante von  $Q_1$  konstant Null ist und auf der oberen die Werte von  $q$  annimmt. Unter der Bedingung

$$(4.1) \quad q(0) = q(1) = 0, \quad q \in H^1(0,1)$$

ist  $g_1 \in H^1(\Gamma)$  und  $g_0, g_1$  erfüllen die Voraussetzungen von Satz 1, wobei wir im folgenden ohne Einschränkung  $g_0 := 0$  setzen (vergl. S. 130). Ferner sei als äußere Kraft ein Potentialfeld angenommen, womit die rechte Seite in (2.1) verschwindet.

Für einen glatteren Übergang ist über (4.1) hinaus zu fordern, daß  $q$  auf  $(0,1)$  mehrfach differenzierbar ist und die stetigen Ableitungen ebenfalls am Rand des Intervalls verschwinden. Für den Fall

$$(4.2) \quad q(s) := -4^j s^j (1-s)^j, \quad s \in [0,1], \quad j \in \mathbb{N}_0$$

beispielsweise ist ab  $j \geq 3$   $g_1 \in C^2(\Gamma)$ , und die Stokes'sche Näherung ist gemäß Satz 1.b klassische Lösung von (2.1) - (2.2). Ferner können wir hierfür ab  $j \geq 2$  mit

$$(4.3) \quad w(x,y) := -y^2(1-y)q(x), \quad (x,y) \in Q_1$$

unmittelbar eine Funktion  $w \in C^\infty(Q_1)$  angeben, welche die Randbedingungen unseres Modells erfüllt.

In der Literatur verbreitet ist der formal einfache, aber im Hinblick auf (4.1) bzw. Satz 1 irreguläre Fall  $j = 0$ , also

$$(4.4) \quad q(s) := -1, \quad s \in [0,1].$$

Man vergleiche z.B. BURGGRAF [12], GREENSPAN [27], TEMAM [54] und WESSELING [59]. Durch (4.4) wird eine konstante "Mitreibgeschwindigkeit" entlang der offenen Kante simuliert; bei (4.2) mit  $j \geq 1$  steigt diese dagegen auf den Scheitelwert Eins an und flaut in gleicher Weise wieder ab. Mit (4.4) ist das auf dem Rand vorgeschriebene Geschwindigkeitsfeld lediglich aus  $\Gamma^2(\Gamma)$  und eine Stromfunktion aus  $H^3(\Omega)$  zu erwarten (vergl. TEMAM [54], Prop. 2.3, S. 35).

Im Gegensatz zum Kreis sind selbst die einfachen elliptischen Probleme 4. Ordnung für das Quadrat analytisch nur in Ausnahmefällen lösbar. Hier sind wir bereits bei der Berechnung von  $\psi_{st}$  und bei SA auf numerische Lösungsmethoden angewiesen. Dabei macht es für den numerischen Aufwand kaum etwas aus, ob wir beim Newtonverfahren in jedem Schritt die Inverse wechseln oder nicht. Deshalb drängt sich für dieses Beispiel neben der durch seine Einfachheit bestechenden SA von den übrigen Verfahren im Grunde nur das NV auf; der Einsatz von NV1 und TV (1. Näherung) im Beispiel des vorigen Abschnitts lag dagegen deshalb besonders nahe, weil dort die Anfangsnäherung  $\psi_{st}$  analytisch bekannt war, und wir uns dabei auf die numerische Lösung eines homogenen RWP gemäß Anhang II.A beschränken konnten. Hier werden wir indes ausgehend von  $\psi_{st}$  alle Funktionen lediglich diskret zur Verfügung haben. Numerisch ist es dabei günstiger, von einem System anstelle einer Gleichung 4. Ordnung auszugehen. Betrachten wir wieder neben  $\psi$  die Wirbelfunktion  $\omega = -\Delta\psi$ , so erhalten wir zur Berechnung der Stokes'schen Näherung:

$$(4.5) \quad -\Delta\psi = \omega, \quad -\Delta\omega = r \quad \text{auf } \Omega \quad (\text{nach oben } r := 0)$$

$$(4.6) \quad \psi|_{\Gamma} = g_0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\nu}|_{\Gamma} = g_1$$

Für SA sind Randwertprobleme gleicher Art zu lösen, wobei lediglich die rechte Seite  $r$  bei jedem Iterationsschritt wechselt (vergl. Kapitel I, Lemma 7.a, S. 18). Für NV erhält man im  $n$ -ten Schritt:

$$(4.7) \quad \psi_n = \psi_{n-1} + c_{n-1}, \quad \omega_n = c_{n-1} + d_{n-1}$$

wobei die Korrekturen  $c_{n-1}$  und  $d_{n-1}$  dem folgenden gekoppelten System genügen:

$$(4.8) \quad -\Delta c_{n-1} = d_{n-1}$$

$$(4.9) \quad -\Delta d_{n-1} + \operatorname{Re} \left( \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x} \frac{\partial d_{n-1}}{\partial y} - \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial y} \frac{\partial d_{n-1}}{\partial x} + \right. \\ \left. \frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial x} \frac{\partial c_{n-1}}{\partial y} - \frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial y} \frac{\partial c_{n-1}}{\partial x} \right) \\ = -\operatorname{Re} F_{n-1}$$

$$(4.10) \quad F_0 := -\Lambda''_0 - r + \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial \omega_0}{\partial y} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \right) \quad \text{und} \\ = 0 \text{ für } \omega_0 := \omega_{\text{St}}$$

$$F_{n-1} := \operatorname{Re} \left( \frac{\partial c_{n-2}}{\partial x} \frac{\partial d_{n-2}}{\partial y} - \frac{\partial c_{n-2}}{\partial x} \frac{\partial d_{n-2}}{\partial y} \right) \quad \text{für } n \geq 2.$$

Als Randbedingung folgt wegen  $c_{n-1} \in H^2_0(\Omega)$

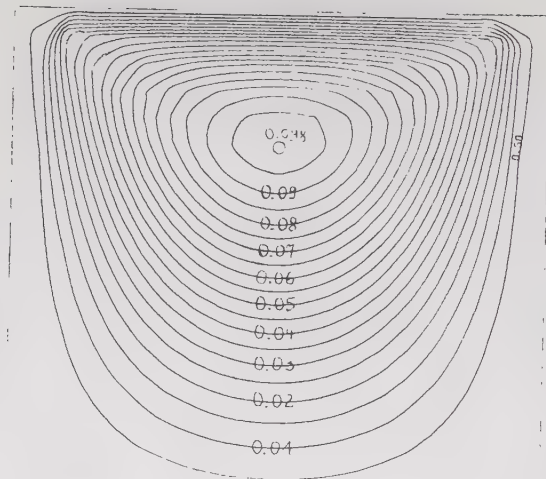
$$(4.11) \quad c_{n-1}|_{\Gamma} = \frac{\partial c_{n-1}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Dasselbe System erhält man, wenn man auf (1.19) die Iterationsvorschrift des NV anwendet. Wie im Zusammenhang mit (1.19) bereits erwähnt, ist diese Aufspaltung wegen der fehlenden Randbedingung an die Wirbelfunktion problematisch. Bei der Verwendung von Differenzenverfahren fällt dies allerdings nicht mehr so sehr ins Gewicht, weil wir aus (4.6) bzw. (4.11) "passende" Randbedingungen für  $\omega$  bzw.  $d_{n-1}$  herleiten können, die diegleiche Konsistenzordnung wie die numerischen Differentiationen besitzen. Hierzu sei auf Anhang II.B verwiesen, wo die numerische Lösung der bei SA, NV und TV auftretenden gekoppelten Systeme behandelt wird.

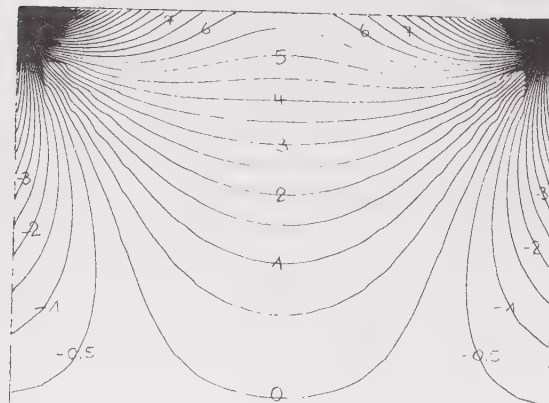
Bei der numerischen Lösung der Probleme gemäß Anhang II.B tritt das Regularitätsproblem hinsichtlich des Gebietsrandes in den Hintergrund; die Ergebnisse lassen sich so interpretieren, daß sie einem "Quadrat mit abgerundeten Ecken" zugehören. Entsprechend wird das Beispiel mit  $q$  aus (4.4) "automatisch" entschärft, da der Übergang von  $g_1 = 1$  auf  $g_1 = 0$  nur über zwei benachbarte Gitterpunkte des Randes vollzogen wird; da diese einen positiven Abstand besitzen, wird im Grunde eine Randgeschwindigkeit simuliert, die zwar bei feiner Diskretisierung sehr rasch, aber nicht mehr sprunghaft ansteigt bzw. abfällt. Allerdings hängen hierfür die Ergebnisse stark von der Feinheit der Diskretisierung ab, was als Zeichen dafür gewertet werden kann, daß die exakte Lösung für das Quadrat nur wenig Glattheitseigenschaften aufweist.

Die folgenden Plotfiguren zeigen die nach Anhang II.B berechneten Stokes'schen Näherungen für die oben genannten Beispiele (4.2) für  $j = 0(1)3$  durch die Höhenlinienbilder der entsprechenden Strom- und Wirbelfunktionen. Man erkennt, daß die Funktionen entsprechend den theoretischen Überlegungen um so glatter sind, je größer  $j$  ist. Der Fall  $j = 0$  fügt sich in gewisser Weise ein.

Figur 5

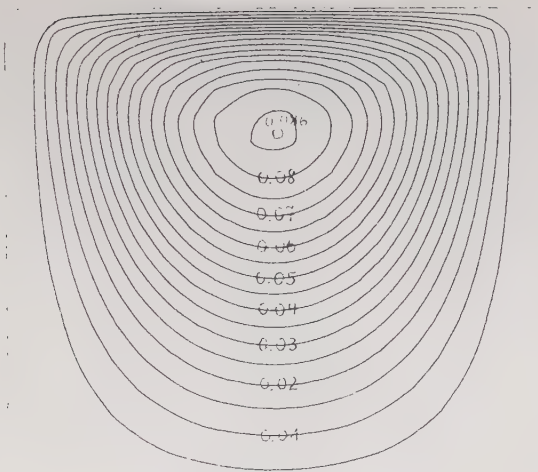


$$\psi_{st} \quad j=0$$



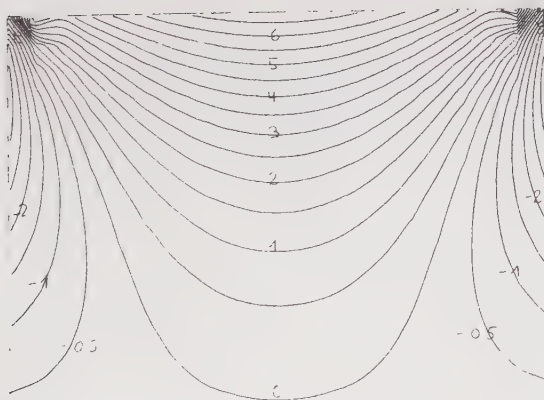
$$\psi_{st} \quad j=0$$

Figur 6



0

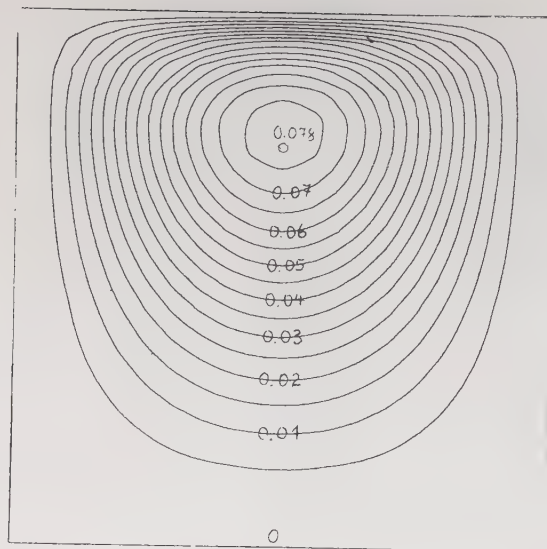
$\psi_{st} \quad j = 1$



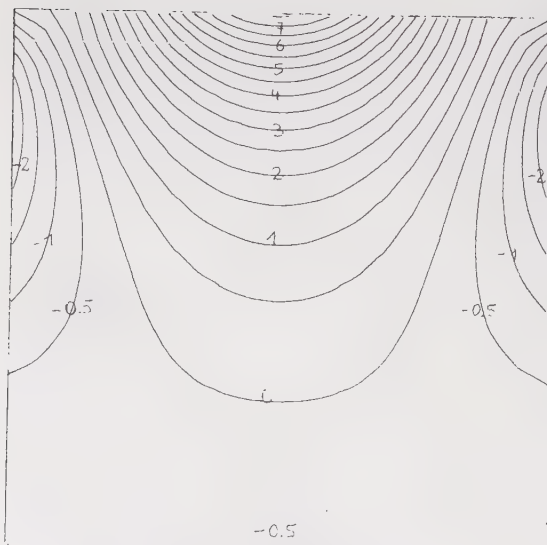
-0.5

$\omega_{st} \quad j = 1$

Figur 7

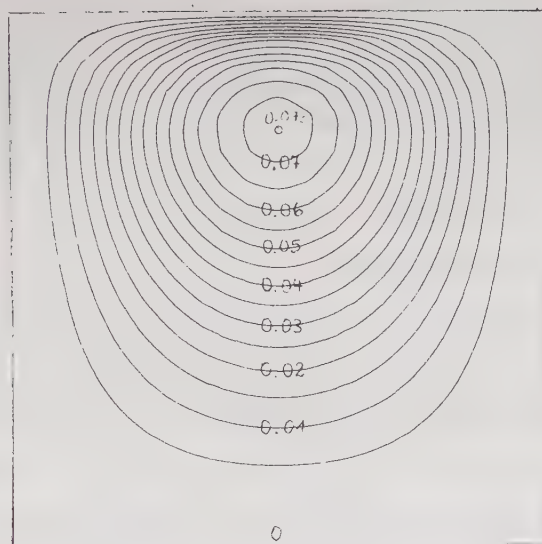


$$\psi_{st} \quad j = 2$$

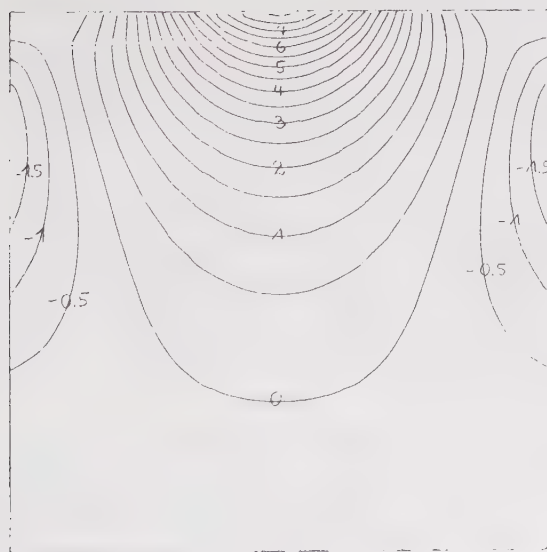


$$\omega_{st} \quad j = 2$$

Figur 8



$\psi_{St} \quad j = 3$



$\omega_{St} \quad j = 3$

Allerdings sind die Werte für  $\alpha$  und  $\beta$  wesentlich größer, was auf das Verhalten in den Ecken zurückzuführen ist (vergl. hierzu auch das Stromlinienbild von  $\omega$ ). Für  $\psi$  drückt sich der Unterschied bildlich im wesentlichen durch die Dichte der Stromlinien entlang der oberen Kante und der Krümmung in den oberen Eckpunkten aus. Zahlenmäßig schlägt er speziell bei den Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  aus Satz 2 zu Buche. Für  $\beta$  gilt dabei nach (2.11)

$$(4.12) \quad \beta = \frac{1}{2} (C_3 \|\psi_{St}\|_{1,\infty} + D_1 \|\omega_{St}\|_{1,2}) ,$$

wobei nach Anhang I, Tabelle 3

$$(4.13) \quad C_3 \leq 0.53913 \quad D_1 \leq 0.071171 .$$

Die Normen in (4.12) wurden aus den diskreten Werten für  $\psi$  und  $\omega$  numerisch berechnet. Für die Konstante  $\gamma$  erhalten wir aus (2.12) und (4.13)

$$(4.14) \quad \gamma \doteq 0.038371 .$$

Die folgende Tabelle enthält die in den obigen Beispielen  $j = 0(1)3$  jeweils resultierenden Werte für  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $Re^+$  und eine Schätzung für  $Re_\infty$ . Hierbei bezeichnet  $Re^+$  wieder den ersten Anwendungsbereich gemäß Kapitel I (4.37), S. 39 und  $Re_\infty$  die Reynoldszahl, die mit Hilfe des Einbettungsverfahrens gemäß Kapitel I, Seite 40 maximal erreicht wird. In der Konstanten  $\alpha$  kommt

| Konstanten zu $\psi_{St}$ und erreichbarer Parameterbereich für<br>$q(s) := -4^j s^j (1-s)^j$ |          |          |          |             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------|----------|----------|-------------|
| j                                                                                             | $\alpha$ | $\beta$  | $Re^+$   | $Re_\infty$ |
| 0                                                                                             | 14.4000  | 2.34911  | 0.161685 | 0.213       |
| 1                                                                                             | 2.15443  | 0.79229  | 0.463046 | 0.631       |
| 2                                                                                             | 2.25631  | 0.607983 | 0.554188 | 0.822       |
| 3                                                                                             | 2.56601  | 0.579794 | 0.559550 | 0.862       |

die Wirkung von  $\psi_{St}$  auf den Bilinearteil zum Ausdruck. Bei der Bestimmung von  $Re^+$  wird sie mit  $\gamma$  multipliziert und hat deshalb nicht so starken Einfluß wie  $\beta$ . Während des Einbettungsprozesses steigen die zu den verschiedenen Näherungen  $\psi_N$  berechneten Werte  $\beta_N$  leicht an.

Dieser Anstieg ist allerdings so gering, daß  $Re_{\infty}$  im wesentlichen durch  $1/2\beta$  gegeben ist (vergl. Kapitel I, S. 42).

Der durch Kapitel I, Satz 4 gesicherte lokale Eindeutigkeitsbereich läßt sich analog zu (3.43) wieder dadurch ausdrücken, daß für eine weitere Lösung der Bilinearteil entsprechend groß sein muß.

Ferner läßt sich mit den gegebenen Konstanten (apriori) der Fehler für  $\psi_{St}$  sowie der Linearisierungsfehler für die ersten Näherungen (SA, NV, TV) in Abhängigkeit von  $Re(0, Re^+]$  abschätzen, indem

$$(4.15) \quad \|\Delta^2 \psi^* - \Delta^2 \psi_{St}\|_{0,2} \leq r_- ; \quad \|\Delta^2 \psi^* - \Delta^2 \tilde{\psi}\|_{0,2} < A_1 \frac{\xi}{1-\tau}$$

mit  $\tilde{\psi} := \psi_1^{SA}, \psi_1^{NV}, \psi_1^{TV}$  ( $A_1$  entsprechend gemäß Tabelle S. 31;  $\xi = Re\alpha$ ,  $\tau = 2 Re\beta$ ). Hieraus können wir beispielsweise eine Abschätzung für die prozentuale Abweichung  $p$  hinsichtlich der Stromfunktion angeben, indem mit  $D_0 \doteq 0.0064611$  (vergl. Anhang I, Tabelle 3):

$$(4.16) \quad \frac{p}{100} \approx \frac{\|\psi^* - \tilde{\psi}\|_{0,\infty}}{\|\psi_{St}\|_{0,\infty}} \leq D_0 \frac{\|\Delta^2 \psi^* - \Delta^2 \tilde{\psi}\|_{0,2}}{\|\psi_{St}\|_{0,\infty}}$$

Die folgende Tabelle enthält  $\|\Delta^2 \psi^* - \Delta^2 \tilde{\psi}\|_{0,2}$  sowie  $p$  für  $Re = 0.1$ ,  $\tilde{\psi} := \psi_{St}, \psi_1^{SA}, \psi_1^{NV}, \psi_1^{TV}$  in den obigen Fällen  $j = 0(1)3$ . Im übrigen sei auf die allgemeinen Betrachtungen am Ende von Kapitel I verwiesen (vergl. S. 43-44).

| Fehlerabschätzung für $\psi_{St}, \psi_1^{SA}, \psi_1^{NV}, \psi_1^{TV}$ bei $Re = 0.1$<br>in der induzierten Norm (oberer Wert) und in $\phi$ (unterer Wert) |        |         |                       |                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|---------|-----------------------|-----------------------|
| j                                                                                                                                                             | Stokes | SA      | NV                    | TV                    |
| 0                                                                                                                                                             | 2.7726 | 1.3326  | 0.05566               | 0.002234              |
|                                                                                                                                                               | 18.3   | 8.79    | 0.367                 | 0.0147                |
| 1                                                                                                                                                             | 0.2563 | 0.04086 | $2.994 \cdot 10^{-4}$ | $6.997 \cdot 10^{-7}$ |
|                                                                                                                                                               | 1.90   | 0.307   | $2.25 \cdot 10^{-3}$  | $5.26 \cdot 10^{-6}$  |
| 2                                                                                                                                                             | 0.2571 | 0.03152 | $2.888 \cdot 10^{-4}$ | $6.487 \cdot 10^{-7}$ |
|                                                                                                                                                               | 2.13   | 0.261   | $2.39 \cdot 10^{-3}$  | $5.37 \cdot 10^{-6}$  |
| 3                                                                                                                                                             | 0.2906 | 0.03403 | $3.666 \cdot 10^{-4}$ | $9.249 \cdot 10^{-7}$ |
|                                                                                                                                                               | 2.57   | 0.301   | $3.24 \cdot 10^{-3}$  | $8.19 \cdot 10^{-6}$  |

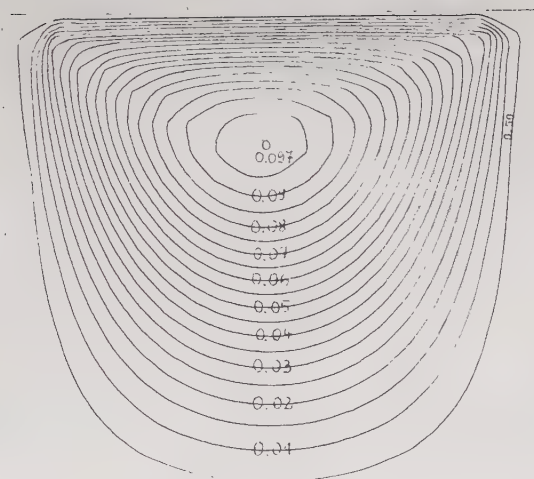
Für  $j = 2$  wurde das in Kapitel I, S. 40 beschriebene Einbettungsverfahren vergleichend für SA, NV und TV durchgeführt. Bei NV und TV bestand jeder Einbettungsschritt lediglich in einer "inneren Iteration", weil nach einem NV- oder TV-Schritt wieder die Voraussetzung (Kapitel I (3.43)) für eine weitere "äußere Iteration" erfüllt war. Die Maximalabweichung des Funktionswertes von Null lag dabei für NV höchstens bei  $10^{-6}$  und für TV bei  $10^{-12}$ . Deshalb spielte die Größe  $\epsilon_N$  bei der Berechnung von  $Re_N$  keine Rolle ( $\epsilon_N \ll \beta_N$ ; siehe S. 40), so daß insbesondere für NV praktisch die gleiche "Schrittweite"  $Re_N - Re_{N-1}$  erzielt wurde wie bei TV.

Für SA waren dagegen in der Regel zwei innere Iterationen notwendig, wobei die Funktionswerte nach den jeweiligen SA-Schritten größenordnungsmäßig bei  $10^{-2}$  lagen. Hier wirkte sich im Gegensatz zu oben  $\epsilon_N$  auch auf die erzielte Schrittweite  $Re_N - Re_{N-1}$  aus. Man vergleiche hierzu die folgende Tabelle:

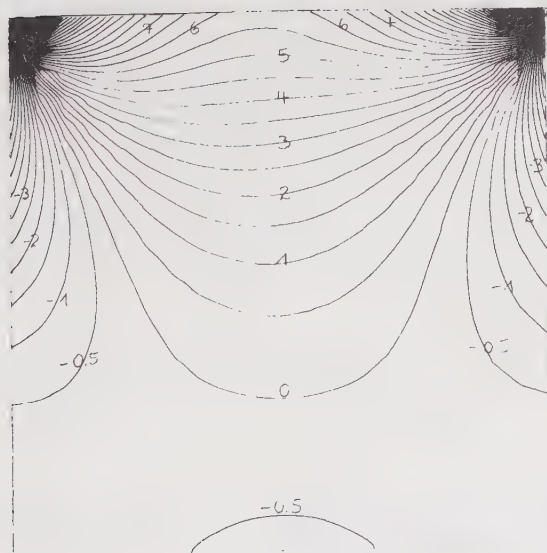
| Einbettungsverfahren für SA, NV und TV ; $j = 2$ |               |                      |
|--------------------------------------------------|---------------|----------------------|
| N                                                | $Re_N$ für SA | $Re_N$ für NV und TV |
| 1                                                | 0.554188      | 0.554188             |
| 2                                                | 0.612870      | 0.680493             |
| 5                                                | 0.754962      | 0.770423             |
| 10                                               | 0.786248      | 0.798732             |
| 20                                               | 0.800810      | 0.811405             |

Bei der numerischen Lösung gemäß Anhang II.B ist ein NV-Schritt nur unwesentlich aufwendiger als ein SA-Schritt; andererseits kommt der prinzipielle Vorteil eines TV-Schritts gegenüber zwei NV-Schritten (Benutzung der gleichen Inversen) bei der iterativen Auflösung des Systems nicht zum tragen. Deshalb ist das NV hier als innere Iteration am günstigsten. Aufgrund der berechneten TV-Näherungen und der aposteriori-Fehlerabschätzungen folgt über die obigen apriori-Abschätzungen hinaus, daß die exakten Lösungen  $\psi^*(Re)$  zu  $Re \in [0, Re_{20}]$  ( $Re_{20} \approx Re_\infty$ ) um höchstens 0.06 % von der Stokes'schen Näherung differieren, d.h. die obigen Strömungsbilder gelten für alle Reynoldszahlen in diesem Bereich. Allerdings ist hierbei der Diskretisierungsfehler unberücksichtigt (vergl. Anhang II).

Figur 9



$$\psi_1^{NV} \quad Re = 10 \quad j = 0$$



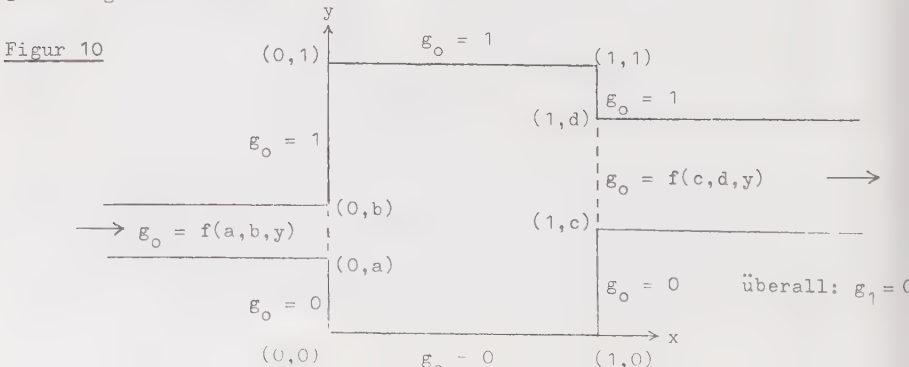
$$\omega_1^{NV} \quad Re = 10 \quad j = 0$$

Wir weisen darauf hin, daß die Werte für die höheren Ableitungen der Stromfunktion gegenüber  $\psi$  selbst relativ groß sind; was sich in den Werten für  $\alpha$  und  $\beta$  niederschlägt (vergl. Tabelle, S. 164). Die Beschränkung unseres Verfahrens bezüglich der erreichten Reynoldszahl ist deshalb auch von daher zu verstehen, daß wir die Ableitungen bis zur 4. Ordnung mit einbeziehen und so auf dem Parameterbereich, wo wir Konvergenz nachweisen, zugleich eine hohe Regularität sichern. Die formale Anwendung der beschriebenen Verfahren führt auf die Vermutung, daß diese auch noch für weit größere Werte von  $Re$  konvergieren (vergl. Anhang II). Figur 9, S. 167, zeigt als Beispiel die erste NV-Näherung zu  $Re = 10$  und  $q = -1$  (bei  $\psi_{St}$  als Ausgangsnäherung). Das Strömungsbild deckt sich mit dem von Greenspan [27]. In diesem Zusammenhang ist interessant, daß GREENSPAN mit seinem Verfahren auch noch für sehr große  $Re$  eine numerische Lösung erhält (bis  $Re = 10000$ ), dabei jedoch auf "Lücken" stößt, d.h. für gewisse  $Re < 10000$  keine Konvergenz feststellt.

### 5. Beispiel 3 - Strömung durch ein mehrseitig offenes System

Wie in Abschnitt 4 setzen wir einen quadratischen Querschnitt der Kantenlänge Eins voraus. Im Unterschied zu den vorangegangenen Beispielen werde nun angenommen, daß Flüssigkeit ein- und ausströmen kann, woraus veränderliche Randbedingungen für die Stromfunktion folgen. Modelle dieser Art sind in der Technik von vielfältigem Interesse, so z.B. bei Untersuchungen des Herz-Kreislauf-Systems in der Medizin oder bei Versuchen zur Geräuschkämpfung.

Wir gehen zunächst von einer Ein- und einer Ausströmöffnung aus, wobei wir zur Beschreibung des Modells einfachheitshalber auf die folgende Figur verweisen:



Da wir das Modell als Randwertproblem auf  $Q_1$  ( $Q_1 := (0,1) \times (0,1)$ ) behandeln wollen, stehen wir von der physikalischen Aufgabenstellung her vor der Schwierigkeit, nicht nur die ein- sondern auch die austretende Strömungsform apriori festzulegen. Dabei ändert sich die Fragestellung dahingehend, wie das Strömungsbild im Innern aussehen muß, damit die vorgeschriebene Austrittsströmung resultiert; beim Problem der Querschnittserweiterung (s.u.), wo die Verhältnisse speziell an der linken engeren Eintrittsöffnung interessieren, läßt sich das Problem unter Umständen (abhängig von Stärke bzw. Querschnitt bei der Eintrittsströmung) auch von daher verstehen, daß der rechte Rand genügend weit entfernt ist und sich bis dorthin die Strömungsverhältnisse normalisiert haben (vergl. S. 172 oben).

Für kleine Reynoldszahlen ist es sinnvoll anzunehmen, daß die eintretende sowie die austretende Strömung vom Poisselle-Typ ist, d.h. die Strömung wird jeweils durch ein konstantes Druckgefälle in x-Richtung bewirkt. Für die eintretende Strömung z.B. ergibt sich dann das Geschwindigkeitsfeld  $(u,v)$ , wo

$$(5.1) \quad u(x,y) = \frac{1}{2} G_0 (b-y)(y-a), \quad v(x,y) = 0 \quad (x \leq 0, a \leq y \leq b)$$

Hierbei ist  $G_0 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$  ( $p$  = Druck,  $\mu$  = Zähigkeit) bzw. bei Verwendung der Reynoldszahl  $G_0 := -\frac{\partial p}{\partial x}$  eine Konstante und  $u$  Lösung des Randwertproblems

$$(5.2) \quad -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G_0, \quad u(x,a) = u(x,b) = 0 \quad (x \leq 0, a \leq y \leq b)$$

(zur Poisselle-Strömung vergl. z.B. WIEGHARDT [60], S. 148 und BATCHELOR [9], S. 180-183). Die zu (5.1) gehörige Stromfunktion ist gemäß (1.9) gegeben durch

$$(5.3) \quad \psi(x,y) = G_0 \left( \frac{1}{6} y^3 - \frac{a+b}{4} y^2 + \frac{ab}{2} y \right) + E_0 \quad (E_0 \in \mathbb{R})$$

Der Fluß  $q_0$  durch den Querschnitt  $(0,a) - (0,b)$  (pro Zeiteinheit eintretende Flüssigkeitsmenge) berechnet sich zu

$$(5.4) \quad q_0 = \int_a^b u(0,y) dy = \psi(0,b) - \psi(0,a) = \frac{G_0 (b-a)^3}{12}.$$

Nach unserer Annahme wird ein entsprechendes Geschwindigkeitsfeld für die ausströmende Flüssigkeit aufgebaut und es gelten analoge

Zusammenhänge zwischen zugehöriger Stromfunktion (mit zugehörigen Konstanten  $G_1, E_1$ ) und dem Fluß  $q_1$  durch den Querschnitt  $(1,c) - (1,d)$ .

Da wir die Flüssigkeit als inkompressibel voraussetzen, muß  $q_1 = q_0$  sein. Dies ist in natürlicher Weise erfüllt, wenn wir entlang der festen Berandung von  $(0,b)$  nach  $(1,d)$  und von  $(0,a)$  nach  $(1,c)$  für  $\psi$  jeweils den Wert bei  $(0,b)$  bzw.  $(1,c)$  ansetzen; hierzu müssen natürlich  $G_1$  und  $E_1$  entsprechend gewählt werden, was stets möglich ist (s.u.). Die Differenz dieser beiden konstanten Randwerte gibt gerade den Fluß an. Den einen Wert, etwa  $\psi(0,a) = \psi(1,c)$ , können wir o.E. auf Null setzen. Für den Fluß der Stärke Eins wird dann

$$(5.5) \quad \psi(0,y) = f(a,b,y) \quad , \quad a \leq y \leq b$$

$$(5.6) \quad \psi(1,y) = f(c,d,y) \quad , \quad c \leq y \leq d \quad ,$$

wobei  $f$  definiert ist durch:

$$(5.7) \quad f(a,b,y) := \frac{1}{(b-a)^3} \left[ 2(y^3 - a^3) - 3(a+b)(y^2 - a^2) + 6ab(y-a) \right]$$

Hierbei sind also  $G_0, E_0$  bzw.  $G_1, E_1$  so bestimmt, daß  $\psi(0,b) = \psi(1,d) = 1$  und  $\psi(0,a) = \psi(1,c) = 0$  gilt. Auf diese Weise ergeben sich die in obiger Skizze auf den Seiten des Quadrats eingezeichneten Randwerte  $g_0$  für  $\psi$ . Darüber hinaus verschwindet überall auf dem Rand die Normalenableitung, und zwar an der festen Berandung aufgrund der Haftbedingung und an den Öffnungen aufgrund der Poiseillschen Strömungsform, d.h. es ist bezüglich Satz 1  $g_1 = 0$  zu setzen. Da die einströmende bzw. ausströmende Geschwindigkeit an den Öffnungsändern verschwindet, ist  $g_0$  einmal stetig differenzierbar, was gerade der obigen Bedingung des Flusses bzw. der Verträglichkeitsbedingung (1.5) entspricht (vergl. Bemerkung 1 zu Satz 1, S. 135). Darüber hinaus ist  $g_0 \in H^2(\Gamma)$ , womit wieder die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind, wenn die äußeren Kräfte entsprechend glatt sind; es sei hier wieder ein Potentialfeld angenommen.

Entsprechende Bedingungen ergeben sich bei mehreren Ein- oder Ausgängen; dies gilt auch bei schrägem Ein- oder Ausfluß, wobei dann  $g_0$  und  $g_1$  veränderlich sind. Natürlich lassen sich auch die Strömungsformen insbesondere am Ausgang variieren.

Wir betrachten die folgenden beiden Fälle:

1. "Querschnittserweiterung":  $a := 0.2$ ,  $b := 0.8$ ,  $c := 0.0$ ,  $d := 1.0$
2. "Wechselseitiger Anschluß":  $a := 0.4$ ,  $b := 1.0$ ,  $c := 0.0$ ,  $d := 0.6$

Mit dem Verfahren aus Anhang II.B wurde zunächst wieder jeweils die Stokes'sche Näherung  $\psi_{St}$  berechnet und aus den numerischen Daten für  $\psi_{St}$  und  $\omega_{St}$  die zugehörigen Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmt. (4.12) - (4.14) sind auch hier gültig.

Mit  $\psi_{St}$  als Ausgangsnäherung wurde wieder das in Kapitel I, S. 40 beschriebene Einbettungsverfahren durchgeführt. Nach den Erfahrungen aus Abschnitt 4 wählten wir für die innere Iteration das NV, wobei auch hier jeweils ein Schritt genügte, um die Bedingung I.(4.43) zu erfüllen ( $\varepsilon_N < 10^{-5}$ ). Es ergeben sich folgende Werte:

| Konstanten zu $\psi_{St}$ und zum Einbettungsverfahren |                     |                   |               |           |                                   |
|--------------------------------------------------------|---------------------|-------------------|---------------|-----------|-----------------------------------|
| Fall                                                   | $\alpha = \alpha_1$ | $\beta = \beta_1$ | $Re^+ = Re_1$ | $Re_{10}$ | $1/2\beta_{10} \approx Re_\infty$ |
| 1                                                      | 23.498              | 1.7556            | 0.18483       | 0.27416   | 0.28480                           |
| 2                                                      | 32.646              | 2.1866            | 0.15125       | 0.22135   | 0.22864                           |

Zur Eindeutigkeit gilt wieder die zu (3.42) entsprechende Aussage. Hinsichtlich der apriori abgeschätzten Linearisierungsfehler erhalten wir analog zu den Beispielen des vorangegangenen Abschnitts die folgende Tabelle

| Fehlerabschätzung für $\psi_{St}$ , $\psi_1^{SA}$ , $\psi_1^{NV}$ , $\psi_1^{TV}$ bei $Re = 0.1$<br>in der induzierten Norm (oberer Wert) und in % (unterer Wert) |        |        |         |                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|--------|---------|------------------------|
| Fall                                                                                                                                                              | Stokes | SA     | NV      | TV                     |
| 1                                                                                                                                                                 | 3.7027 | 1.3527 | 0.08107 | $3.5503 \cdot 10^{-3}$ |
|                                                                                                                                                                   | 2.39   | 0.874  | 0.0524  | $2.29 \cdot 10^{-3}$   |
| 2                                                                                                                                                                 | 6.0516 | 2.7870 | 0.2497  | 0.02061                |
|                                                                                                                                                                   | 3.91   | 1.80   | 0.161   | 0.0133                 |

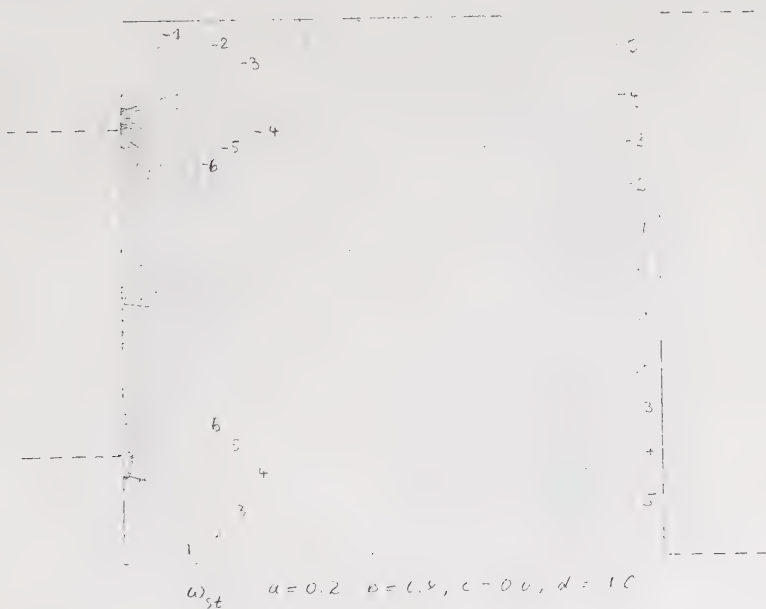
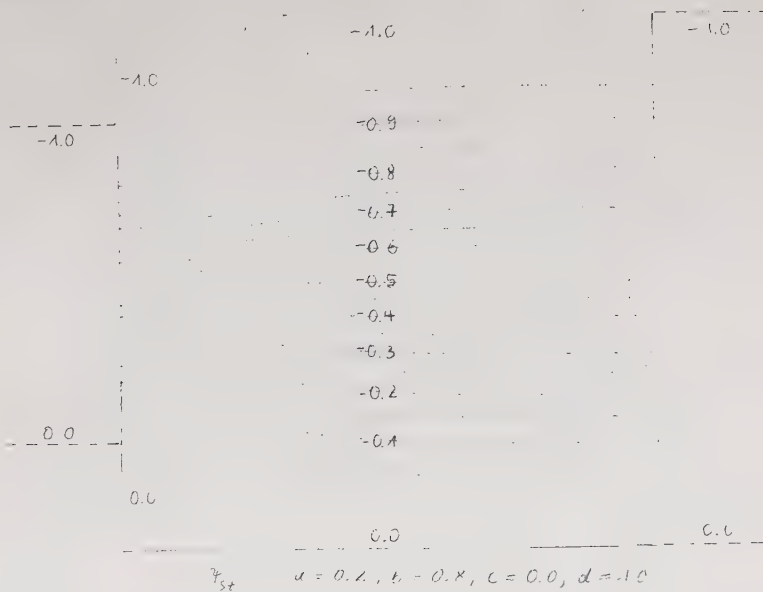
Man beachte, daß aufgrund des anderen Verhältnisses von  $Re = 0.1$  zu  $Re^+$  die Abschätzungen weit größer ausfallen als im vorigen Abschnitt bei  $j = 1, 2, 3$ .

Die Plotfiguren 11 und 13 zeigen die Höhenlinienbilder von Strom- und Wirbelfunktion zur jeweiligen Stokes'schen Näherung. Entsprechend der gestellten Randbedingungen geht  $\psi$  stetig differenzierbar in die zur Poisellschen Strömung gehörige Stromfunktion über. Die Wirbelfunktion besitzt indessen nur im ersten Beispiel und dort auch nur am rechten Rand eine entsprechende stetige Fortsetzung, indem für die obige Poisellsche Strömungsform

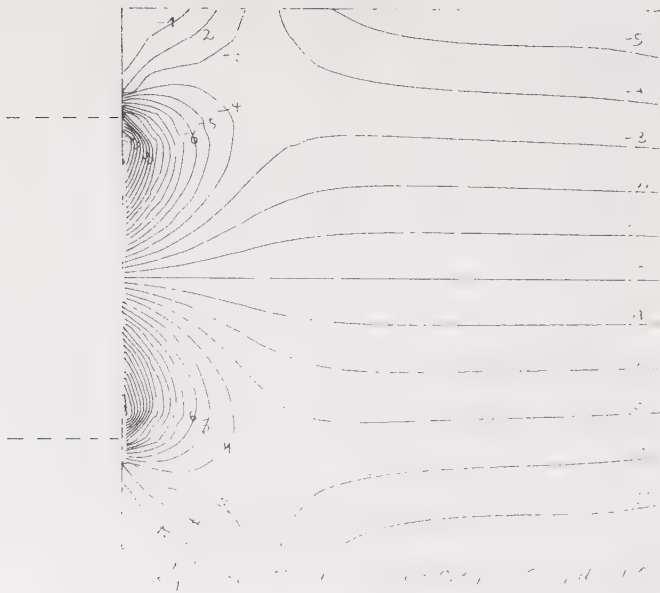
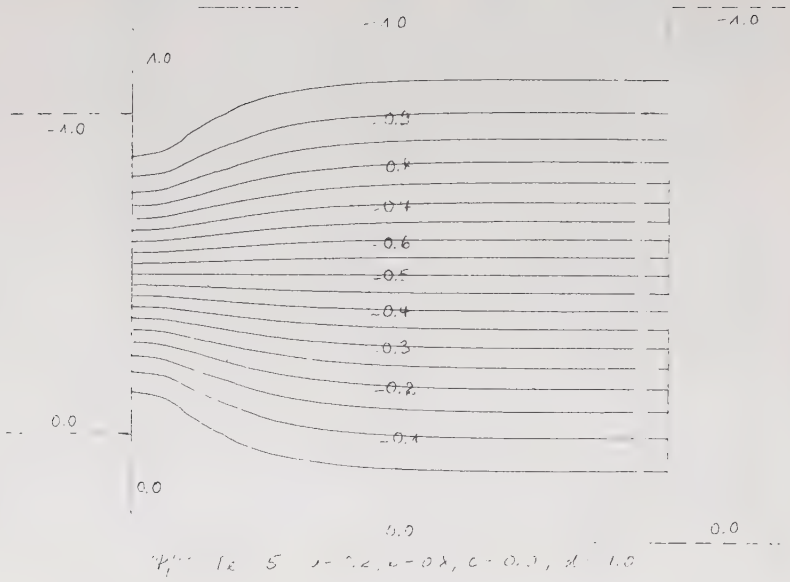
$$(5.8) \quad w = \frac{6(a+b)-12y}{(b-a)^3} .$$

Die NV-Näherungen weichen in dem Bereich  $[0, R_{10}]$  nur minimal von der Stokes'schen Näherung ab. Gemäß den aposteriori-Fehlerabschätzungen gilt dies auch für die exakten Lösungen. Die Veränderungen im Stromlinienbild für  $Re \in (0, Re_\infty)$  gegenüber  $Re = 0$  sind deshalb kaum sichtbar. Die Plotfiguren 12 und 14 zeigen die entsprechenden Bilder für die (formal berechnete) 1. NV-Näherung zu  $Re = 5$ . Man sieht, daß auch hierfür die Abweichungen zur Stokes'schen Näherung noch relativ gering sind; Unterschiede werden naturgemäß wieder an den Wirbelfunktionen am ehesten deutlich.

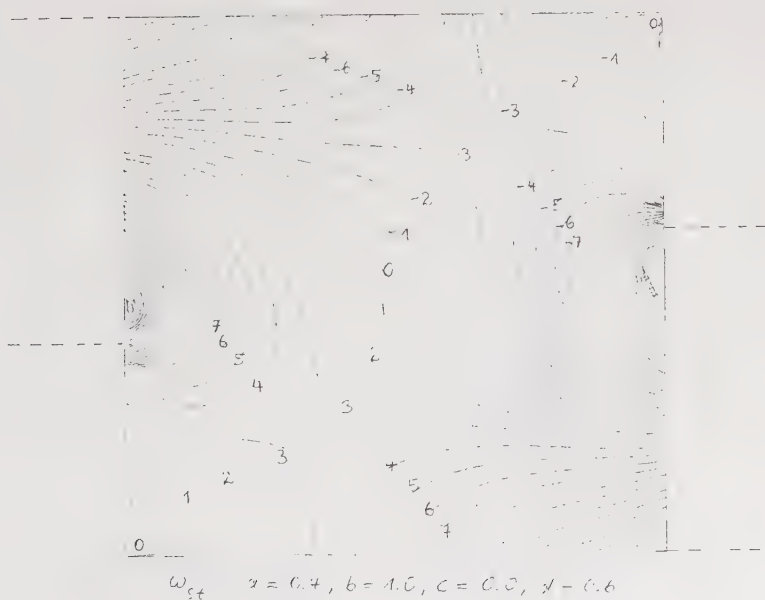
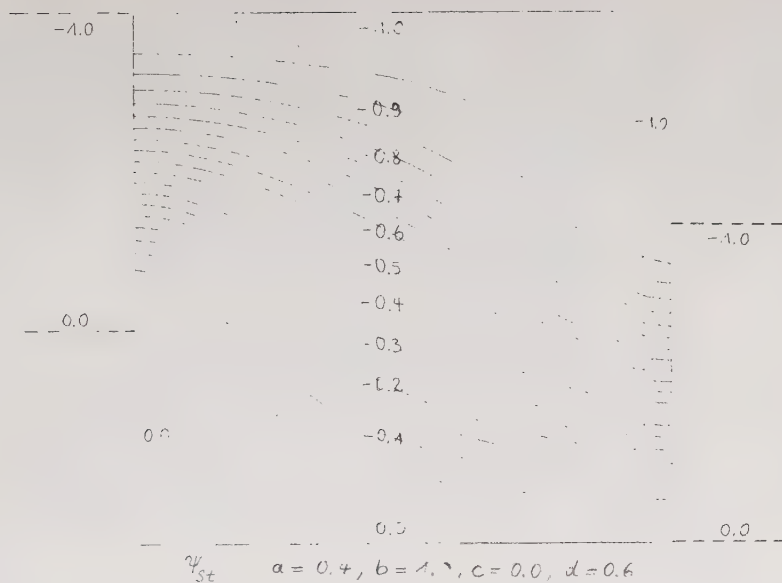
Figur 11



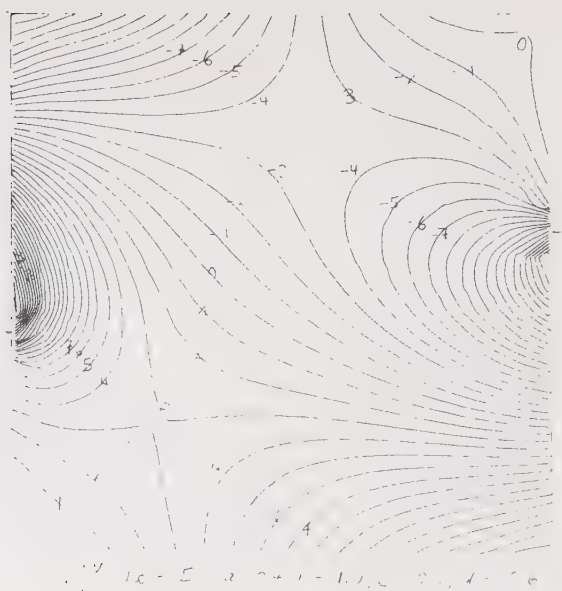
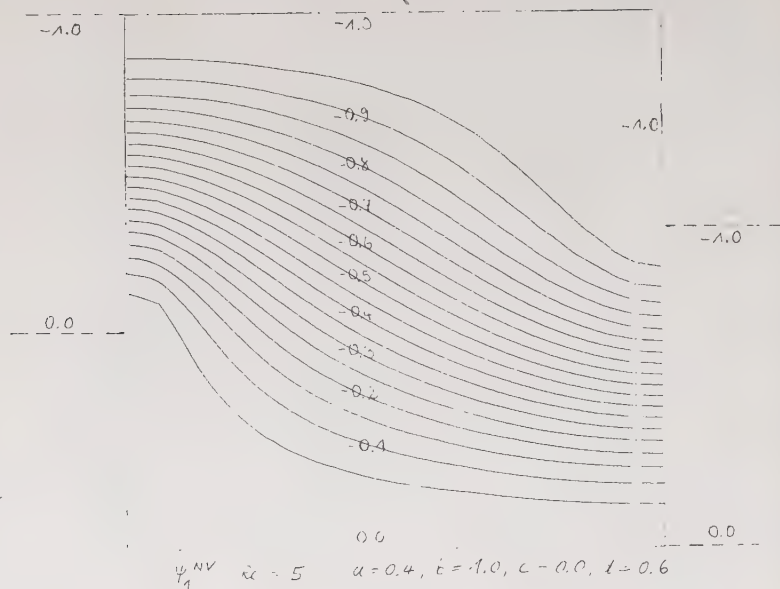
Figur 12



Figur 13



Figur 14



## S C H L U S S B E M E R K U N G E N

Die entwickelten Verfahren und zugehörigen Abschätzungen lassen sich bei entsprechender Verallgemeinerung auch für den Fall andersgearteter Nichtlinearitäten verwenden, z.B. dann, wenn diese zweimal fréchet-differenzierbar und die Ableitungen in hinreichendem Maße wachstumsbeschränkt sind. Allerdings wird die sich auf die 2. Ableitung beziehende Konstante  $\gamma$  nicht mehr allein von der Struktur des Operators, sondern auch von dem betrachteten Definitionsbereich abhängen.

Einige der bestimmten Einbettungskonstanten erscheinen nicht optimal. Allerdings zeigen die unteren Schranken an, daß hierdurch nichts Wesentliches eingebüßt wurde. Ein Problem bleibt die Bestimmung der Konstanten bezüglich der höheren Ableitungen für irgendein hinreichend reguläres Gebiet, da diese im allgemeinen nicht durch die entsprechende bekannte Konstante für ein umgebendes Gebiet abgeschätzt werden kann.

Unter der Bedingung, daß die Reynoldszahl genügend klein ist, wurde die Konvergenz des NV und seiner Varianten unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen bereits von SCHOENHALS [46] gezeigt. Mit den hier bereitgestellten Verfahren und Abschätzungen konnten hinsichtlich der Größe der Reynoldszahlen und des Fehlers zahlenmäßige Angaben gemacht werden, wobei allerdings trotz Einsatz der Kontinuitätsmethode die Konvergenz funktionalanalytisch nur für recht kleine  $Re$  gesichert wird. Dies rührt zum einen daher, daß wir die Lösbarkeit des Problems aus der Invertierbarkeit des Linearteils abgeleitet haben, wodurch wir in natürlicher Weise an der Lösung des Linearteils gebunden sind. Die Verbundenheit mit dem Linearteil ging dabei insbesondere beim Nachweis der stetigen Invertierbarkeit der Operatorableitung ein. Ein weiterer Grund sind die hohen Regularitätsansprüche, die durch die Einbeziehung der Ableitungen bis 4. Ordnung implizit gestellt werden. Bei Ecken im Gebiet oder weniger glatten Randwerten wirkt sich dies - wie die behandelten Beispiele zeigen - entsprechend einschränkend aus.

Es sei erwähnt, daß sich bis zu einem gewissen Grade der axialsymmetrische Fall (vergl. Kapitel V, S. 129) analog zum ebenen Fall behandeln läßt, wenn man den Bildraum  $Y$  über die mit  $\frac{1}{\rho}$  gewichtete

$L^2$ -Norm erklärt. Schwierigkeiten bereiten allerdings die entsprechenden Abschätzungen für den Bilinearteil, zumal die Konstanten zu  $\mathcal{N}$  und  $\mathcal{N}^2$  erst noch bestimmt werden müßten. Es erscheint daher zweckmäßiger, die Methoden unmittelbar auf das ursprüngliche System der Geschwindigkeitskomponenten (vergl. Kapitel V, S. 125) zu versuchen, da auch dieses sich formal unter dem in Kapitel I behandelten Problemkreis einordnet. Der Nachteil mehrerer Unbekannter steht dabei der Vorteil geringerer Regularitätsansprüche gegenüber.

A N H A N G I

Die folgenden drei Tabellen enthalten die in Kapitel III bestimmten oberen Schranken der Konstanten  $C_k(m, \Omega)$  und  $D_k(m, \Omega)$  für  $m, n \in \{1, 2\}$ , wo  $\Omega$  ein Intervall der Länge  $a$ , eine Kreisscheibe vom Radius  $a$  bzw. ein Quadrat der Kantenlänge  $a$  ist. Die entsprechenden  $a$ -Potenzen basieren auf (2.37). Alle Hinweise beziehen sich auf Kapitel III. Die mit (\*) gekennzeichneten Werte sind (im Rahmen der angegebenen Stellen) optimal.

| Tabelle 1: $n = 1 \quad \Omega = (0, a)$ |                                                       |     |                    |                  |                                                                    |         |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-----|--------------------|------------------|--------------------------------------------------------------------|---------|
| $m$                                      | $\lambda_1(m, \Omega)$                                | $k$ | $C_k(m, \Omega)$   | Hinw.            | $D_k(m, \Omega)$                                                   | Hinw.   |
|                                          | $\frac{\pi^2}{a^2}$<br>$\pi \approx 3.1415926536$     | 0   | $0.1013212 a^2$    | (1.16)*          | $\sqrt[3]{\frac{a^3}{48}}$                                         | (3.34)* |
|                                          |                                                       | 1   | $0.3183099 a$      | (1.16)*          | $\sqrt[3]{\frac{a}{3}}$                                            | (3.41)  |
|                                          |                                                       | 2   | 1                  | trivial*         | --                                                                 | --      |
| 2                                        | $\frac{4}{a^4}$<br>$\pi \approx 4.73004074486$<br>(1) | 0   | $0.001997747 a^4$  | (1.16)*          | $0.0064506804 \sqrt[3]{a a^3}$                                     | (3.26)  |
|                                          |                                                       | 1   | $0.009449425 a^3$  | (1.16)           | $0.0470112364 \sqrt[3]{a a^2}$                                     | (3.27)  |
|                                          |                                                       | 2   | $0.0446961625 a^2$ | (1.16)*          | $\sqrt[3]{\frac{a}{45}} \left(a + \frac{a}{\sqrt[3]{3}}\right)$    | (3.42)  |
|                                          |                                                       | 3   | $0.3257034 a$      | (2.22)<br>(2.37) | $\sqrt[3]{\frac{a}{3}} \left(1 + \frac{a^2}{\sqrt[3]{280}}\right)$ | (3.43)  |
|                                          |                                                       | 4   | 1                  | trivial*         | --                                                                 | --      |

| Tabelle 2: $n = 2 \quad \Omega = K_a$ |                                                |   |                   |         |                    |        |
|---------------------------------------|------------------------------------------------|---|-------------------|---------|--------------------|--------|
| m                                     | $\lambda_j(m, \Omega)$                         | k | $C_k(m, \Omega)$  | Hinw.   | $D_k(m, \Omega)$   | Hinw.  |
| 1                                     | $\frac{j_{01}^2}{a^2} = 2.4048256 \quad (2)$   | 0 | $0.172915063 a^2$ | (1.16)* | $\frac{a}{2}$      | (3.8)  |
|                                       |                                                | 1 | $0.41583057 a$    | (1.16)* | --                 | --     |
|                                       |                                                | 2 | 1                 | (2.3)*  | --                 | --     |
| 2                                     | $\frac{\sigma^4}{a^4} = 3.196220617 \quad (3)$ | 0 | $0.009581936 a^4$ | (1.16)* | $0.048943681 a^3$  | (3.26) |
|                                       |                                                | 1 | $0.030625976 a^3$ | (1.16)  | $0.2140862736 a^2$ | (3.27) |
|                                       |                                                | 2 | $0.097887362 a^2$ | (1.16)* | $2.617726081 a$    | (3.28) |
|                                       |                                                | 3 | $0.428172547 a$   | (2.25)  | --                 | --     |
|                                       |                                                | 4 | $1.083478862$     | (2.36)  | --                 | --     |

| Tabelle 3: $n = 2 \quad \Omega = (0,1) \times (0,1)$ |                                                                 |   |                    |         |                    |        |
|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---|--------------------|---------|--------------------|--------|
| m                                                    | $\lambda_j(m, \Omega)$                                          | k | $C_k(m, \Omega)$   | Hinw.   | $D_k(m, \Omega)$   | Hinw.  |
| 1                                                    | $2 \pi^2$                                                       | 0 | $0.025330296 a^2$  | (1.16)* | $0.13201026412 a$  | (3.40) |
|                                                      |                                                                 | 1 | $0.159154944 a$    | (1.16)* | --                 | --     |
|                                                      |                                                                 | 2 | 1                  | (2.3)*  | --                 | --     |
| 2                                                    | untere Schranke:<br>$4 \frac{c^4}{a^4} = 3.196220617 \quad (4)$ | 0 | $0.0023954826 a^4$ | (1.16)  | $0.0064610664 a^3$ | (3.26) |
|                                                      |                                                                 | 1 | $0.0108279131 a^3$ | (1.16)  | $0.071171 a^2$     | (3.27) |
|                                                      |                                                                 | 2 | $0.0489436673 a^2$ | (1.16)  | nicht bestimmt     | --     |
|                                                      |                                                                 | 3 | $0.53913 a$        | (2.46)  | --                 | --     |
|                                                      |                                                                 | 4 | nicht bestimmt     | --      | --                 | --     |

Anmerkungen zu den Werten bezüglich  $\lambda_1(m, c)$

- (1)  $\kappa$  wurde mit dem NV bestimmt als kleinste positive Nullstelle von  $\cos \kappa \cosh \kappa - 1$  .  
(vergl. COURANT-HILBERT [17] Bd. I, S. 296; COLLATZ [15])
- (2)  $j_{01}$  ist die erste positive Nullstelle der Besselfunktion  $J_0$   
(erster Art und nullter Ordnung); ihr Wert wurde aus ABRAMOWITZ-  
STEGUN [1] entnommen (vergl. COURANT-HILBERT [17] Bd. I, S. 304).
- (3)  $\sigma$  wurde mit dem NV bestimmt als kleinste positive Nullstelle von  
 $J'_0(\sigma) J'_0(i\sigma) - iJ'_0(i\sigma) J'_0(\sigma)$  .  
(vergl. COURANT-HILBERT [17] Bd. I, S. 308)
- (4) Die hier angegebene untere Schranke ergibt sich aus der Beziehung  
(1.22) in Kapitel III, indem  $(0, a) \times (0, a) \subset K_a$ , mit  $a' := \frac{a}{\sqrt{2}}$  .

# A N H A N G    II

## A. Zur Numerischen Lösung des RWP (3.29) aus Kapitel V

Auf einem Gebiet  $\Omega$  mit  $\bar{\Omega} \subset Q := (a,b) \times (a,b)$  ( $a,b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ) sei für  $\lambda > 0$  das folgende RWP zu lösen:

$$(A.1) \quad \Delta^2 c + \lambda \left( p \frac{\partial c}{\partial x} + q \frac{\partial c}{\partial y} + s \frac{\partial \Delta c}{\partial x} + t \frac{\partial \Delta c}{\partial y} \right) = r \quad \text{auf } \Omega$$

$$(A.2) \quad c|_{\Gamma} = \frac{\partial c}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0,$$

wobei  $p, q, s, t$  und  $r$  auf  $\Omega$  erklärte stetige Funktionen sind. In bezug auf Problem (3.29) in Kapitel V sind zu setzen:

$$(A.3) \quad p := 0, \quad q := -2, \quad s := \frac{1}{2} y(1+x), \quad t := \frac{1}{4} [1 - (x^2 + y^2) - 2x - 2x^2] \\ r := \operatorname{Re} y(1+x), \quad \lambda := \operatorname{Re}, \quad \Gamma := K_1, \quad Q := (-1.1, 1.1) \times (-1.1, 1.1)$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß eine Lösung von (A.1) - (A.2) existiert und genügend glatt ist.

Wir belegen das Quadrat  $\bar{Q}$  in üblicher Weise mit einem äquidistanten Gitter  $Q^h$  der Maschenweite  $h := (b-a)/(n-1)$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$ ) und bestimmen einen Vektor  $c^h = (c_{ij}^h)_{n^2}$ , der auf den Gitterpunkten  $(x_i, y_j) \in Q^h$ ,  $c^h := Q^h \cap \Omega$  eine Näherung für die Funktion  $c$  darstellt. Hierzu ersetzen wir die Differentialoperatoren in (A.1) durch entsprechende Differenzenoperatoren, welche bei Anwendung auf  $c^h$  wiederum einen auf die Diskretisierung passenden Vektor liefern. Es seien  $D_1^{h+}, D_1^{h-}, D_2^{h+}, D_2^{h-}$  und  $\Delta^h$  für  $v^h = (v_{ij}^h)_{n^2} \in \mathbb{R}^{n^2}$  definiert durch

$$(A.4) \quad (D_1^{h-} v^h)_{ij} := \frac{1}{h} (v_{ij}^h - v_{i-1,j}^h), \quad (D_1^{h+} v^h)_{ij} := \frac{1}{h} (v_{i+1,j}^h - v_{ij}^h)$$

$$(A.5) \quad (D_2^{h-} v^h)_{ij} := \frac{1}{h} (v_{ij}^h - v_{i,j-1}^h), \quad (D_2^{h+} v^h)_{ij} := \frac{1}{h} (v_{i,j+1}^h - v_{ij}^h)$$

$$(A.6) \quad (\Delta^h v^h)_{ij} := \frac{1}{h^2} (-4v_{ij}^h + v_{i-1,j}^h + v_{i+1,j}^h + v_{i,j-1}^h + v_{i,j+1}^h),$$

wobei  $i, j = 2(1)n-1$ .  $n$  sei so groß gewählt, daß zwischen dem Rand von  $Q$  und dem Rand von  $\Omega$  noch genügend viele Gitterpunkte liegen (möglich wegen  $\bar{\Omega} \subset Q$ ), so daß bei zweifacher Anwendung von  $\Delta^h$  auf einen "vollen" Vektor  $v^h$  noch ein solcher resultiert, der bezüglich

allen Gitterpunkten aus  $\mathcal{C}^h$  erklärt ist ("voll" bedeutet, daß  $v^h$  selber bezüglich allen Gitterpunkten aus  $\mathcal{Q}^h$  erklärt ist). Für  $(x_i, y_j) \in \mathcal{C}^h$  ersetzen wir nun in (A.1):

$$(A.7) \quad (\Delta^2 c)(x_i, y_j) \quad \text{durch} \quad (\Delta^h(\Delta^h c^h))_{ij}$$

$$(A.8) \quad \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)(x_i, y_j) \quad \text{durch} \quad \begin{cases} (D_1^{h+} c^h)_{ij} & \text{falls } p_{ij} := p(x_i, y_j) \leq 0 \\ (D_1^{h-} c^h)_{ij} & \text{" " " " } > 0 \end{cases}$$

$$(A.9) \quad \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)(x_i, y_j) \quad \text{durch} \quad \begin{cases} (D_2^{h+} c^h)_{ij} & \text{falls } q_{ij} := q(x_i, y_j) \leq 0 \\ (D_2^{h-} c^h)_{ij} & \text{" " " " } > 0 \end{cases}$$

$$(A.10) \quad \left(\frac{\partial \Delta c}{\partial x}\right)(x_i, y_j) \quad \text{durch} \quad \begin{cases} (D_1^{h+}(\Delta^h c^h))_{ij} & \text{falls } s_{ij} := s(x_i, y_j) > 0 \\ (D_1^{h-}(\Delta^h c^h))_{ij} & \text{" " " " } \leq 0 \end{cases}$$

$$(A.11) \quad \left(\frac{\partial \Delta c}{\partial y}\right)(x_i, y_j) \quad \text{durch} \quad \begin{cases} (D_2^{h+}(\Delta^h c^h))_{ij} & \text{falls } t_{ij} := t(x_i, y_j) > 0 \\ (D_2^{h-}(\Delta^h c^h))_{ij} & \text{" " " " } \leq 0 \end{cases}$$

Hierdurch erhalten wir anstelle von (1.1) - (1.2) das folgende lineare Gleichungssystem für  $c^h = (c_{ij}^h)_{m \times m}$ :

$$(A.12) \quad \begin{aligned} & \left[ 20 + \lambda h^3 (|p_{ij}| + |q_{ij}|) + 5\lambda h (|s_{ij}| + |t_{ij}|) \right] c_{ij}^h \\ & - \left[ 8 + \lambda h (|t_{ij}| + |s_{ij}|) \right] (c_{i-1,j}^h + c_{i+1,j}^h + c_{i,j-1}^h + c_{i,j+1}^h) \\ & + 2 (c_{i-1,j-1}^h + c_{i+1,j-1}^h + c_{i-1,j+1}^h + c_{i+1,j+1}^h) \\ & + c_{i-2,j-2}^h + c_{i+2,j-2}^h + c_{i-2,j+2}^h + c_{i+2,j+2}^h \\ & - \lambda h^3 (|p_{ij}| c_{i+1,j+1}^h + |q_{ij}| c_{i,j+1}^h) \\ & - \lambda h |t_{ij}| (4c_{i,j+1}^h - c_{i-1,j+1}^h - c_{i+1,j+1}^h + c_{i,j+2}^h) \\ & - \lambda h |s_{ij}| (4c_{i+1,j}^h - c_{i+1,j-1}^h - c_{i+1,j+1}^h + c_{i+2,j}^h) \\ & = h^4 r_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1(1)n^2 \quad \text{mit } (x_i, y_j) \in \mathcal{C}^h \end{aligned}$$

$$(A.13) \quad c_{ij}^h = 0 \quad \text{für alle } i, j = 1(1)n^2 \quad \text{mit } (x_i, y_j) \in \mathcal{Q}^h \setminus \mathcal{C}^h$$

Bei den "Alternativindizes" richtet sich das Vorzeichen nach dem zugehörigen Koeffizienten, und zwar derart, daß beispielsweise

$$(A.14) \quad |p_{ij}| c_{i+1,j}^h := |p_{ij}| c_{i-\text{sign}(p_{ij}),j}^h \quad \text{und} \\ |p_{ij}| c_{i-1,j}^h := |p_{ij}| c_{i+\text{sign}(p_{ij}),j}^h .$$

Diese Fallunterscheidung wird durch (A.8) - (A.11) induziert, indem einmal der vorwärts- und einmal der rückwärts genommene, einfache Differenzenquotient eingesetzt wird; dies geschieht in der Weise, daß der Koeffizient von  $c_{ij}^h$  möglichst groß wird. Diese alternative Vorgehensweise findet sich z.B. bereits bei GREENSPAN [27]. Sie bewirkt, daß das System auch noch für große  $\lambda$  schwach diagonal dominant ist und sich über geeignete iterative Verfahren (Relaxationsverfahren) auflösen läßt (siehe z.B. MARSAL [35] oder STOER-BULIRSCH [50], Bd. 2). Wie groß hierbei  $\lambda$  werden darf, hängt von  $\alpha$ ,  $h$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $s$  und  $t$  ab.

Es sei betont, daß mit der Auflösbarkeit von (A.12) - (A.13) nicht die Existenz der Inversen des kontinuierlichen Operators  $f_\lambda: U \rightarrow Y$  bewiesen ist, wo  $U := H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ ,  $Y := L^2(\Omega)$  und  $f_\lambda(c)$  durch die linke Seite von (A.1) definiert ist. Von daher sichert die Auflösbarkeit noch nicht die Konvergenz von  $c^h$  (mit seinen Differenzenquotienten) gegen eine Lösung  $c$  (mit den entsprechenden Ableitungen) für  $h \rightarrow 0$ , etwa im gleichmäßigen Sinne auf  $\Omega^h$ . Allerdings deutet vieles darauf hin, daß dies zumindest bezüglich  $c$  und den niedrigeren Ableitungen der Fall ist. Sollte ein derartiger Zusammenhang bestehen, so stellt sich weiter die Frage, ob damit  $f_\lambda$  bezüglich der von uns in Kapitel V gewählten Normierung stetig invertierbar ist. Ein entsprechender Nachweis würde den bisher durch das Banach-Lemma (Kapitel I, Satz 1.a) beschränkten Anwendungsbereich unserer Methoden auf NSG bezüglich der Reynoldszahl wesentlich erweitern.

Bei dem von uns eingeschlagenen Weg wird indessen die Existenz und Stetigkeit der Inversen von  $f_\lambda$  - wenn auch nur für kleine  $\lambda > 0$  - im Zusammenhang mit der Konvergenz des betrachteten Iterationsverfahrens gesichert. Ist die damit existierende Lösung  $c$  von (A.1) - (A.2) genügend glatt, so ist (A.13) konsistent zu (A.2) und ferner

$$(A.15) \quad (\Delta^2 c)_{ij} - ([\Delta^h]^2 c^h)_{ij} = O(h^2)$$

$$(A.16) \quad (D_k c)_{ij} - (D_k^{h+} c^h)_{ij} = O(h) \quad , \quad k = 1, 2$$

$$(A.17) \quad (D_k \Delta c)_{ij} - (D_k^{h+} \Delta^h c^h)_{ij} = O(h) \quad , \quad k = 1, 2$$

Basierend auf der stetigen Invertierbarkeit von  $f_\lambda$  und auf diesen Konsistenzbeziehungen gehen wir davon aus, daß für diese  $\lambda$  auch die Konvergenz von  $c^h$  gegen  $c|_{\Omega^h}$  im gleichmäßigen Sinne gegeben ist und der Diskretisierungsfehler von der Ordnung  $h$  ist (vergl. auch GRAF FINCK VON FINCKENSTEIN - HOEHN [23]). Dies nehmen wir auch noch bezüglich der Ableitungen bis 2. Ordnung an; eine Konvergenz der höheren Differenzenquotienten (bis zur Ordnung 4) gegen die entsprechende Ableitung ist aufgrund der Normen, bezüglich der  $f_\lambda^{-1}$  stetig ist, zumindest noch in dem Sinne zu erwarten, daß beispielsweise für  $h \rightarrow 0$

$$(A.18) \quad \sum_{i,j=1}^{n^2} \gamma_{ij}^h ([\Delta^h]^2 c^h)_{ij}^2 \rightarrow \int_{\Omega} (\Delta^2 c)^2 dx dy \quad ,$$

sobald  $\gamma_{ij}^h$  ( $i, j = 1(1)n^2$ ) auf die Diskretisierung passende Integrationsgewichte sind. Ein exakter Beweis dieser Konvergenzaussagen würde den hier gesteckten Rahmen sprengen. Es sei in diesem Zusammenhang auf eine Arbeit von STUEBEN [51] hingewiesen. Hinsichtlich der benutzten allgemein bekannten Aussagen bezüglich Differenzenverfahren sei auf die einschlägige Literatur verwiesen (z.B. MARSAL [35] bzw. STOER-BULIRSCH [50]).

Für die obigen Konsistenzbeziehungen muß im allgemeinen  $c \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C_b^6(\Omega)$  vorausgesetzt werden. In dem von uns betrachteten Beispiel (A.3) wird aufgrund des glatten Randes und der glatten Koeffizienten die Lösung von (A.1)-(A.2) eine analytische Funktion sein. Theoretisch können wir dabei nach oben zu vorgegebener Reynoldszahl  $Re$  die Maschenweite  $h$  so klein wählen, daß der Diskretisierungsfehler gegenüber dem mit unseren Methoden abschätzbaren Fehler aus der NV-Linearisierung vernachlässigbar klein ist. Natürlich sind dem aus bekannten Gründen (Speicherbedarf, Konvergenz des Relaxationsverfahren) Grenzen gesetzt und die Ergebnisse aus Kapitel V sprechen dafür, daß umgekehrt der Linearisierungsfehler in dem von uns sichergestellten Konvergenzbereich der kleinere ist. Es sei jedoch bemerkt, daß für  $Re \rightarrow 0$  nicht nur der Linearisierungs-, sondern auch der Diskretisierungsfehler gegen

Null strebt. Dies erhellt z.B. daraus, daß auch das diskrete System für  $Re = 0$  unabhängig von dem Wert für  $h$  die Nulllösung erzeugt; ferner ist zu vermerken, daß bei kleinerem  $Re$  der Einfluß der Differenzenausdrücke, die lediglich von der Konsistenzordnung 1 sind, gegenüber dem des "Hauptteils" mit der Konsistenzordnung 2 schwächer wird. Letztere Überlegung macht die dargestellte Lösungsmethode zumindest für kleine Reynoldszahlen akzeptabel.

Zur Lösung von (A.3) durch (A.12) - (A.13) wurde ein FORTRAN-Programm erstellt. Gerechnet wurde mit  $h := \frac{1}{20}$  ( $n = 41$ ) auf der TR 445. Im Zusammenhang mit der oben geschilderten Problematik sei erwähnt, daß das Gleichungssystem mit dem Relaxationsverfahren noch bis ca.  $Re = 30$  auflösbar war; allerdings stieg der Rechenaufwand mit wachsendem Parameter stark an.

#### B. Zur numerischen Lösung der RWP (4.5) - (4.11) aus Kapitel V

Für  $Q_1 := (0,1) \times (0,1)$  sei das folgende System zu lösen

$$(B.1) \quad -\Delta u = v, \quad -\Delta v = r \quad \text{auf } Q_1$$

$$(B.2) \quad u|_{\Gamma} = s, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} = t,$$

wobei  $r$  auf  $Q_1$  und  $s, t$  auf  $\Gamma$  (Rand von  $Q_1$ ) erklärte Funktionen sind. Diese seien hinreichend glatt, so daß (B.1) - (B.2) eine genügend oft differenzierbare Lösung  $(u, v)$  besitzt (vergl. Kapitel V, Satz 1).

Wir belegen analog zu Teil A  $Q_1$  mit einem äquidistanten Gitter  $Q_1^h$  und bestimmen Vektoren  $u^h, v^h$  die auf den Gitterpunkten die Funktionen  $u, v$  approximieren. Wir bezeichnen  $u(x_i, y_j)$  durch  $u_{ij}$ ; entsprechend seien  $r_{ij}, s_{ij}$  und  $t_{ij}$  erklärt ( $s_{ij}, t_{ij}$  nur für  $i, j \in \{1, n\}$ ). Den Deltaoperator in (B.1) ersetzen wir analog zu (A.6) und betrachten anstelle von (B.1) das Gleichungssystem

$$(B.3) \quad \begin{aligned} 4 u_{ij}^h - u_{i-1,j}^h - u_{i+1,j}^h - u_{i,j-1}^h - u_{i,j+1}^h &= h^2 v_{ij}^h \quad \text{für } i, j = 3(1)n-2 \\ 4 v_{ij}^h - v_{i-1,j}^h - v_{i+1,j}^h - v_{i,j-1}^h - v_{i,j+1}^h &= h^2 r_{ij} \quad \text{für } i, j = 2(1)n-1 \end{aligned}$$

Die restlichen Werte, d.h.:  $u_{ij}^h$  für  $i, j \in \{1, 2, n-1, n\}$  und  $v_{ij}^h$  für  $i, j \in \{1, n\}$  ermitteln wir aus (B.2) und setzen z.B. auf dem linken Rand ( $x = 0$ ,  $y \in [0, 1)$  bzw.  $i = 1$ ,  $j = 1(1)n-1$ ):

$$(B.4) \quad u_{1j}^h = s_{1j} \quad \text{für } j = 1(1)n-1$$

$$(B.5) \quad u_{2j}^h = \frac{1}{4} \left( 3s_{1j} + u_{3j}^h - 2h t_{1j} \right) \quad \text{für } j = 2(1)n-1$$

$$(B.6) \quad v_{1j}^h = \frac{1}{h^2} \left( 4s_{1j} - s_{1,j+1} - s_{1,j-1} - 2u_{2j}^h - 2h t_{1j} \right) \quad \text{für } j = 2(1)n-1$$

$$v_{11}^h = \frac{1}{h^2} \left( 4s_{11} - 2s_{1,2} - 2s_{2,1} - 4h t_{11} \right)$$

Dabei entspricht (B.4) der ersten Bedingung aus (B.2). (B.5) erhalten wir über die Normalenableitung  $\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)$  an der Stelle  $(0, y_j)$ , indem wir für diese den Differenzenquotienten

$$(B.7) \quad \frac{1}{2h} \left( 3u_{1j}^h - 4u_{2j}^h + u_{3j}^h \right)$$

einsetzen und nach  $u_{2j}^h$  auflösen. Für (B.6) denken wir uns  $u$  über  $Q_1$  hinaus auf einem Streifen der Breite  $h$  fortgesetzt, so daß mit entsprechend zugehörigen Werten  $u_{0,j}^h$  und  $u_{1,0}^h$

$$(B.8) \quad (-\Delta^h u^h)_{ij} = \frac{1}{h^2} \left( 4u_{1j}^h - u_{0j}^h - u_{2j}^h - u_{1,j-1}^h - u_{1,j+1}^h \right).$$

Setzen wir für die Normalenableitung den mittleren Differenzenquotienten  $\frac{1}{2h} (u_{2j}^h - u_{0j}^h)$  ein, so können wir  $u_{0j}^h$  mit Hilfe von  $u_{2j}^h$  und  $s_{1j}$  in (B.8) ersetzen. Für  $j = 1$  ist entsprechend auch noch  $u_{1,0}^h$  zu eliminieren. Man beachte, daß in der Formel für  $v_{11}^h$  die Stetigkeit von  $t$  im linken unteren Eckpunkt eingeht.

Entsprechende Gleichungen erhalten wir an den übrigen Kanten von  $Q_1$ . Wir haben damit (B.2) durch Bedingungen für  $u^h$  und  $v^h$  konsistent ersetzt. Zwecks exakten Beweises sei auf GREENSPAN [27] verwiesen. Das so entstandene Gleichungssystem für  $u^h, v^h$  läßt sich dadurch leicht auflösen, daß man auf (B.3) in üblicher Weise das Relaxationsverfahren anwendet und bei jedem Relaxationsschritt die Werte auf dem äußeren Gitter gemäß (B.4) - (B.6) anpaßt.

Entsprechend wurde zur numerischen Lösung von (4.8) - (4.11) vorgegangen; analog zu der bereits in Teil A beschriebenen Methode wurde dabei in der Differenzengleichung für die Korrektur  $d$  im Bilinearteil

alternativ der vorwärts- oder rückwärtsgenommene Differenzenquotient eingesetzt, in der Weise, daß die Diagonaldominanz erhalten blieb. Die einfachen Ableitungen der diskret bekannten Näherungen aus dem vorangegangenen NV- bzw. TV-Schritt wurden durch den mittleren Differenzenquotienten ersetzt. Diese numerische Lösungsmethode entspricht gerade der "inneren Iteration" von GREENSPAN (vergl. [27], S. 136-147). Im übrigen gelten die Ausführungen von Teil A entsprechend, wobei allerdings für die Beispiele im Quadrat weniger Regularität vorausgesetzt werden kann als beim Kreisbeispiel.

ABKÜRZUNGEN UND BEZEICHNUNGEN

BIL1, BIL2: s.S. 22

$C^k$ -Typ,  $C^k$ -Rand,  $C^{k,\lambda}$ -Rand: s.S. 50

$C^k(\cap)$ ,  $C^\infty_0(\cap)$ ,  $C^k_b(\cap)$ ,  $C^k(\bar{\cap})$ ,  $C^{k,p}(\cap)$ ,  $C^{k,\lambda}(\bar{\cap})$ : s.S. 46

$C_k(m, \cap)$ ,  $D_k(m, \cap)$ : s.S. 74

DP: "Dirichletproblem", s.S. 57-58

DBF: "Dirichletsche Bilinearform", s.S. 57

dund: Abkürzung für "dann und nur dann, wenn"

GU: "Gårdingsche Ungleichung", s.S. 62

$H^{k,p}(\cap)$ ,  $H^{k,p}_0(\cap)$ : s.S. 48,  $H^{k,p}_0(\cap) = H^{k,p}(\cap)$  oder  $= H^{k,p}_0(\cap)$

$H^k(\cap)$ ,  $H^k_0(\cap)$ : s.S. 49,  $H^k_0(\cap) = H^k(\cap)$  oder  $= H^k_0(\cap)$

$\mathfrak{H}^{k,2}_0(\cap)$ ,  $\mathfrak{H}^{k,2}_0(\cap)$ ,  $\mathfrak{H}^{k,2}_0(\cap)$ : s.S. 76

hKDP: "homogenes klassisches Dirichletproblem", s.S. 58

hVDP: "homogenes verallgemeinertes Dirichletproblem", s.S. 58

HU: "Höldersche Ungleichung", s.S. 53

$K_a$ : offene Kreisscheibe vom Radius  $a > 0$

KDP: "Klassisches Dirichletproblem", s.S. 57

koniar: s.S. 9

$L^p(\cap)$ : s.S. 48

$L^2(\cap)$ : s.S. 76

$\lambda_1(m, \cap)$ : s.S. 81

MU: "Mittelungleichung", s.S. 53

$N_0$ :  $N \cup \{0\}$ ;  $N^n_0$ ,  $N^n$ :  $n$ -faches kartesisches Produkt von  $N_0$  bzw.  $N$

NV, NVO, NV1: "Newton-Verfahren" bzw. Varianten hiervon, s.S. 18

NSG: "Navier-Stokes-Gleichungen", s.S. 125

PU: "Poincarésche Ungleichung", s.S. 54

$Q_a$ : offenes Quadrat  $(0, a) \times (0, a)$

Re: "Reynoldszahl"; (deshalb:  $\text{Realt.}\{z\}$ : Realteil von  $z \in \mathbb{C}$ )

RWP: "Randwertproblem"

SA: "Sukzessive Approximation", s.S. 21

TV: "Tschebyscheffverfahren", s.S. 18

VDP: "Verallgemeinertes Dirichletproblem", s.S. 58

$\text{vol}(\Omega)$ : "Volumen von  $\Omega$ ", s.S. 50

VONS: "Vollständiges Orthonormal-System", s.S. 49

$W^{k,p}(\Omega)$ : s.S. 48

$\approx$ : übliche Rundung

$\equiv$ : Aufrundung

$\underset{\cdot}{=}$ : Abrundung

$a := b$  oder  $b := a$ :  $a$  wird durch  $b$  definiert

$i = j(k)l$ : alle Zahlen  $i = j+kn$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$  kleiner gleich  $l$  ( $k, l \in \mathbb{N}; j \in \mathbb{N}_0$ )

$\frac{\partial}{\partial v}$ : Normalenableitung

$\frac{\partial}{\partial \tau}$ : Tangentialableitung

$|\cdot|$ : Betrag in  $\mathbb{C}$ , Betrag eines Multiindex, euklidische Norm in  $\mathbb{R}^n$

$\|\cdot\|$ : Norm allgemein

$\|\cdot\|_L$ : induzierte Norm, s.S. 8

$|\cdot|_{k,p}$ : s.S. 47

$|\cdot|_{k,\infty}$ : s.S. 48

$|\cdot|_{k,p}$ : s.S. 46 und 76

$(\cdot, \cdot)_k$ : s.S. 49 und 76

$|\cdot|_k, \|\cdot\|_k$ : s.S. 49

$\Delta$ : s.S. 63

$\mathcal{K}$ : s.S. 129

$\nabla$ : s.S. 76

$a \cdot b$ : inneres Produkt von  $a, b \in \mathbb{F}$

$n$ : Normalenvektor

$t$ : Tangentialvektor

$[q]$ : kleinste ganze Zahl kleiner gleich  $q \in \mathbb{R}$

$\blacktriangle$ : heißt das Ende einer Beweises an

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit befaßt sich mit der Lösung nichtlinearer Operatorgleichungen der Form  $Lx + \lambda B(x, x) = r$ , wo  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $L: X \rightarrow Y$  ein linearer,  $B: X \times X \rightarrow Y$  ein bilinearer Operator und  $X, Y$  geeignete Räume sind. An das gesuchte Element  $x$  können gewisse Zusatzbedingungen gestellt sein. Es wird davon ausgegangen, daß eine Lösung  $x_0$  für  $\lambda = 0$  bekannt ist, und untersucht, inwieweit über geeignete Iterationsverfahren ausgehend von  $x_0$  eine Lösung zu  $\lambda \neq 0$  approximiert werden kann. Hierzu werden das Newtonverfahren, einige Varianten hiervon und das Tschebyscheffverfahren mit begleitenden Konvergenzsätzen herangezogen. Diese Verfahren werden in eine "Kontinuitätsmethode" eingebettet, um Lösungen zu betragsmäßig möglichst großen Parameterwerten zu erreichen. Im wesentlichen wird vorausgesetzt, daß die Einschränkung von  $L$  auf einen gewissen Teilraum  $U$  von  $X$  bijektiv ist,  $Y$  ein Banachraum darstellt und der Bilinearteil sich dem Linearteil in gewisser Weise unterordnet.

Diese Voraussetzungen werden für den Fall quasilinearer Randwertprobleme nachgewiesen, wo  $L := (-1)^m \Delta^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , (oder auch ein allgemeinerer elliptischer Differentialoperator der Ordnung  $2m$ ) ist und  $B$  durch Produkte von Ableitungen erklärt ist, deren Ordnung gemessen an  $m$  nicht zu hoch ist. Hierbei seien Dirichletsche Randbedingungen gestellt. Es wird  $Y := L^2(\Omega)$  gesetzt, womit sich für  $U$  bzw.  $X$  entsprechende Sobolevräume anbieten. Die Grundmenge  $\Omega$  sei dabei ein beschränktes Gebiet des  $\mathbb{R}^n$  mit genügend glattem Rand.

Für die praktische Anwendung der Verfahren müssen gewisse Konstanten bereitgestellt werden. Bei obigen Randwertproblemen läuft dies im wesentlichen auf die Bestimmung einiger Konstanten aus den Sobolev'schen Einbettungssätzen hinaus. Soweit nicht die kleinstmöglichen Konstanten ermittelt werden, werden Einschließungen angegeben.

Zur Erläuterung und Diskussion wird ein eindimensionales Randwertproblem betrachtet, wo zum Vergleich die exakten Lösungen in Form elliptischer Integrale angegeben werden.

Ausgangs- und Zielpunkt der entwickelten Methoden ist die Anwendung der genannten Iterationsverfahren auf den Fall der Navier-Stokes-Gleichungen, den Bewegungsgleichungen der Strömungsmechanik. Für die inkompressible, stationäre, ebene Strömung führen diese gerade auf ein Randwertproblem des obigen Typs mit  $m := 2$ . Der Parameter  $\lambda$  ist als sogenannte "Reynoldszahl" in natürlicher Weise gegeben und  $x_0$  als "Stokes'sche Näherung" bekannt. Es werden drei im Wesen verschiedene Beispiele betrachtet ("Hohlraumströmungen" und "Durchflußmodelle"). Teilweise wurden diese bereits auch von anderen Autoren behandelt. Indem wir von der Lösung der linearen Gleichung ausgehen, werden hier speziell Aussagen für den Fall kleiner Reynoldszahlen, d.h. "zäher" Flüssigkeiten gewonnen. Im Vergleich zu anderen Arbeiten können aufgrund der bereitgestellten Abschätzungen konkrete Angaben über Konvergenzbereich und Linearisierungsfehler hinsichtlich der betrachteten Iterationsverfahren gemacht werden.

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

- [ 1 ] ABRAMOWITZ, M. - STEGUN, I.A.: Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications Inc., New York 1964
- [ 2 ] ACHIESER, N.I. - GLASMAN, I.M.: Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum. Akademie-Verlag Berlin, 5. Auflage, 1968
- [ 3 ] ADAMS, R.A.: Sobolev Spaces. Academic Press, New York 1975
- [ 4 ] ADAMS, R.A.: The uniform continuity of functions in Sobolev spaces. Cand. Math. Bull., Vol. 19 2 (1976) 129-136
- [ 5 ] AGMON, S.: Lectures on elliptic boundary value problems. Van Nostrand Math. Studies, Princeton, New York 1965
- [ 6 ] ANDREW, A.L.: Error bounds for the modified Newton's method. Bull. Austral. Math. Soc. 14 (1976) 427-433
- [ 7 ] AVILA, J.H. Jr.: The Feasibility of Continuation Methods for Nonlinear Equations. SIAM J. Numer. Anal. 11 (1) (1974) 102-122
- [ 8 ] BACHMANN, G. - NARICI, L.: Functional Analysis. Academic Press, New York 1966
- [ 9 ] BATCHELOR, G.K.: An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press, New York 1967
- [ 10 ] BATCHELOR, G.K.: On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. J. Fluid Mech. 1 (1956) 177-190
- [ 11 ] BRONSTEIN, I.N. - SEMENDJAJEW, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. 13. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Zürich 1973
- [ 12 ] BURGGRAF, O.R.: Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. J. Fluid Mech. 24 (1) (1966) 113-151
- [ 13 ] CARTAN, H.: Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen. B.I.-Hochschultaschenbücher Nr. 112/112a, Bibliographisches Institut, Mannheim 1966
- [ 14 ] COLLATZ, L.: Functionalanalysis und Numerische Mathematik. Springer-Verlag, Berlin 1964
- [ 15 ] COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Geest & Porting Leipzig, 2. Auflage, 1963
- [ 16 ] COURANT, R.: Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Math. Z. 7 (1920) 1-57
- [ 17 ] COURANT, R. - HILBERT, D.: Methods of Mathematical Physics. Interscience Publishers Inc., New York 1970

- [18] DEAN, W.R.: Note on the slow motion of fluid. Philosophical Magazine, London 21 (7) (1936)
- [19] DENNIS, J.E. JR.: On the Kantorovich hypothesis for Newton's method. SIAM J. Numer. Anal. 6 (3) (1969) 493-507
- [20] DOERING, B.: Über das Newtonsche Näherungsverfahren. Math.-Phys. Semesterber. 16 (1969) 27-40
- [21] DOERING, B.: Das Tschebyscheff-Verfahren in Banach-Räumen. Numer. Math. 15 (1970) 175-195
- [22] FICKEN, F.: The continuation method for functional equations. Comm. Pure Appl. Math. 4 (1951) 435-456
- [23] GRAF FINCK VON FINCKENSTEIN, K. - HOEHN, W.: Einige Bemerkungen zur numerischen Lösung nichtlinearer gewöhnlicher Randwertprobleme 2. Ordnung. TH Darmstadt 1977
- [24] FRANK, P. - MISES, R.: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Vierweg & Sohn, Braunschweig 1930
- [25] FRIEDMAN, A.: Partial Differential Equations. Holt, Rinehardt and Winston Inc., New York 1969
- [26] GRAGG, W.B. - TAPIA, R.A.: Optimal error bounds for the Newton-Kantorowitsch-theorem. SIAM J. Numer. Anal. 11 (1) (1974)
- [27] GREENSPAN, D.: Lectuers on the Numerical Solution of Linear, Singular and Nonlinear Differential Equations Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New York 1968
- [28] KALABA, R.: On Nonlinear Differential Equations, the Maximum Operation, and the Monotone Convergence. J. Math. Mech. 8 (4) (1959) 549-550
- [29] KANTOROWITSCH, L.W. - AKILOW, G.P.: Funktionalanalysis in normierten Räumen. Akademie-Verlag, Berlin 1964
- [30] LADYSHENSKAJA, O.A.: Funktionalanalytische Untersuchungen der Navier-Stokes'schen Gleichungen. Akademie-Verlag, Berlin 1965
- [31] LAETSCH, T.: The Number of Solutions of a Nonlinear Two Point Boundary Value Problem. Indiana Univ. Math. J. 20 (1) (1970) 1-13
- [32] LAMB, H.: Hydrodynamics. 6. Edition, Cambridge University Press, New York 1932
- [33] LIONS, J.L. - MAGENES, E.: Non homogenes boundary value problems and applications. Translation from the French by P. Kenneth, Springer-Verlag, Berlin 1973
- [34] VON MANGOLDT, H. - KNOPP, K.: Einführung in die höhere Mathematik. Bd. 3, Hirzel-Verlag Stuttgart, 14. Auflage, 1975; Bd. 4 (LOESCH, F.) 2. Auflage, 1975

- [35] MARSAL, D.: Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1976
- [36] McFARLAND, J.E.: An iterativ solution of the quadratic equations in Banach space. Proc. Amer. Math. Soc. (1958) 824-830
- [37] MEYER ZUR CAPELLEN, W.: Integraltafeln. Springer-Verlag, Berlin 1950
- [38] MIRANDA, C.: Partial Differential Equations of Elliptic Type. 2. Edition, Springer-Verlag, New York 1970
- [39] ORTEGA, J.M. - RHEINOLDT, W.C.: Iterative Solution of Non-linear Equations in Several Variables. Academic Press, New York 1970
- [40] PALTSEV, B.V.: Convergence of the method of successive approximations with split boundary conditions, when solving the boundary value problem for the Navier-Stokes equations. USSR Comp. Math. Math. Phys. 10 (1970) 282-287
- [41] PARMET, I.L. - SAIBEL, E.: The Newton-Raphson approximation applied to the Navier-Stokes-equation with application to the base flow problem. Z. Angew. Math. Mech. 48 (1968) 1-10
- [42] PAYNE, E. - WEINBERGER, H.F.: New Bounds in Harmonic and Biharmonic Problems. J. Mathematical Phys. 4 (1957) 291-307
- [43] PETROWSKY, I.G.: Lectures on Partial Differential Equations. Interscience Publisher Inc., 5th Edition, New York 1966
- [44] SCHLICHTING, H.: Grenzschicht-Theorie. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 5. Auflage 1965
- [45] SCHMEIDLER, W.: Linear Operators in Hilbert Space. Academic Press, New York 1954
- [46] SCHOENHALS, D.: Das Newton-Verfahren für Navier-Stokes-Gleichungen mit Anwendungen. Dissertation, TH Darmstadt 1978
- [47] SIGILLITO, V.G.: Explicit apriori inequalities with applications to boundary value problems. Pitman Publishing Co., London 1977
- [48] SNEDDON, I.N.: Fouriertransforms. McGraw-Hill, New York 1951
- [49] SPREUER, H. - ADAMS, E.: Pathologische Beispiele von Differenzenverfahren bei nichtlinearen gewöhnlichen Randwertaufgaben. Z. Angew. Math. Mech. 57 (1977) T 304-305
- [50] STOER, J. - BULIRSCH, R.: Einführung in die Numerische Mathematik II. Springer-Verlag, Berlin 1973
- [51] STUEBEN, K.: Approximation und Fehlerabschätzung für Potentiale ebener kompressibler Unterschallströmungen. Dissertation, Universität Köln 1977

- [52] STYCZEK, A.: The Solution of the Navier-Stokes-Equation via Successive Approximations. Bull. Acad. Polon. Sci. Sers. Sci. Tech. 25 (8) (1977) 45-53
- [53] TALENTI, G.: Best Constant in Sobolev Inequality. Ann. Mat. Pura Appl., Serie IV, Tomo CX (1976) 353-372
- [54] TEMAM, R.: Navier-Stokes-Equations. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam 1977
- [55] TIMOSHENKO, S.: Theory of plates and shells. McGraw-Hill, New York 1959
- [56] TREFFTZ, E.: Über Fehlerabschätzung bei Berechnung von Eigenwerten. Math. Ann. 108 (1933) 595-604
- [57] VON WAHL, W.: Über die stationären Gleichungen von Navier-Stokes, semilineare elliptische und parabolische Gleichungen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. 80 (1978) 129-149
- [58] WATSON, G.N.: A Treatise on the Theorie of Bessel Functions. Cambridge University Press, New York 1944
- [59] WESSELING, P.: Numerical Solution of the Navier-Stokes equations by means of a multiple grid method and Newton iteration. Delft University of Technology, Department of Mathematics, the Netherlands 1977
- [60] WIEGHARDT, K.: Theoretische Strömungslehre. Teubner-Verlag, Stuttgart 1974

Bei Herrn Professor Dr. B. Döring möchte ich mich für die Betreuung der Arbeit bedanken. Er hat das Thema vorgeschlagen und stand mir mit zahlreichen Hinweisen zur Seite.

Herrn Prof. Dr. W. Petry danke ich für die Übernahme des Koreferats.

Den Herren P.W. Meyer, M. Teusner und R. Voller danke ich für hilfreiche Diskussionen.

## L E B E N S L A U F

Am 20. August 1944 bin ich als viertes Kind des Ingenieurs Helmut Lütcke und seiner Ehefrau Leni, geborene Filko, in Ratingen, Talstraße 23, geboren.

Im Frühjahr 1951 wurde ich eingeschult und wechselte nach vier Jahren Volksschule auf das Städtische Neusprachliche Gymnasium Ratingen. Dort machte ich im Februar 1965 mein Abitur.

Danach begann meine Dienstzeit in der Bundeswehr beim Panzergranadierbataillon 191 in Ahlen, Westfalen, wo ich im März 1967 als Fahnenjunker der Reserve entlassen wurde.

Zum Sommersemester 1967 meldete ich mich zum Studium der Mathematik und Physik an der Universität Köln. 1969 wurde ich in die Studienstiftung des Deutschen Volkes aufgenommen. Im August 1973 schloß ich das Studium mit dem Diplom in Mathematik ab; die Diplomarbeit bei Professor Dr. J. Schröder behandelte ein Verfahren zur Fehlerabschätzung bei partiellen Differentialgleichungen.

Seit Oktober 1973 arbeite ich als Assistent von Professor Dr. B. Döring am Lehrstuhl für Angewandte Mathematik der Universität Düsseldorf.

Seit dem 2. April 1971 bin ich verheiratet und habe einen dreijährigen Sohn.

